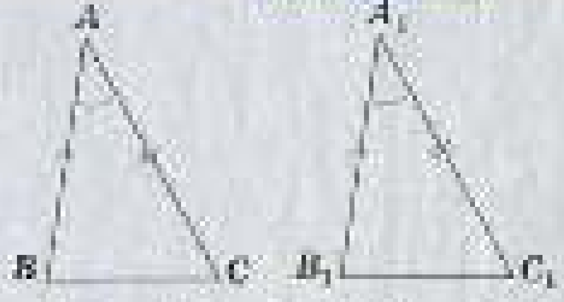
Геометрия

7 8 9

ПРОСВЕЩЕНИЕ

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

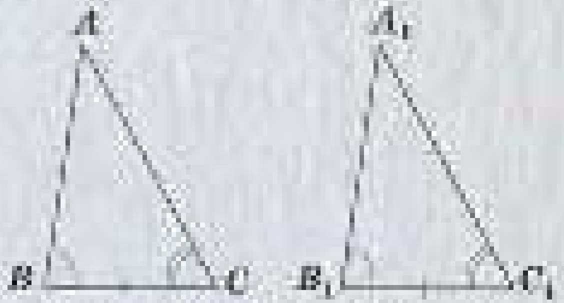
первый признак



Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

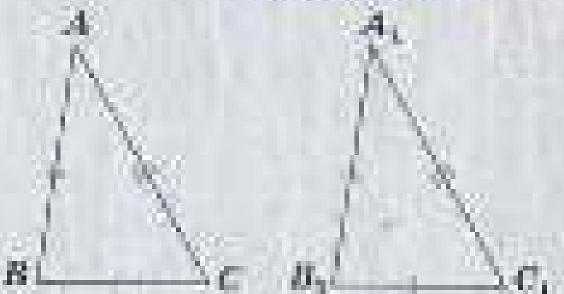
второй признак



Если $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

третий признак

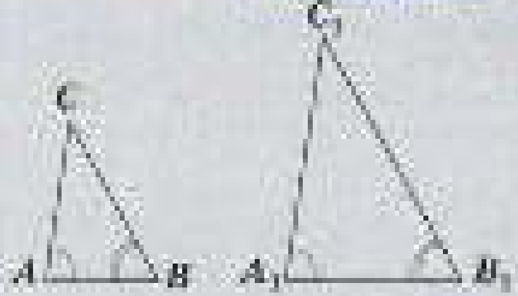


Если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Признаки подобия треугольников

первый признак



Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

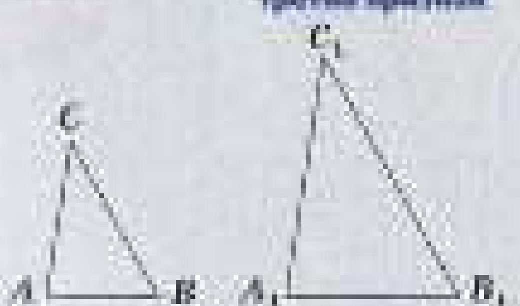
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

второй признак

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

третий признак



Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

ФГОС

Геометрия

7–9

классы

**Учебник
для общеобразовательных
организаций**

2-е издание

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва «Просвещение» 2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

А в т о р ы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина

Издание подготовлено под научным руководством академика А. Н. Тихонова

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/583 от 14.10.11) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-346 от 17.10.11)

Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. —
Г36 2-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 383 с. : ил. — ISBN 978-5-09-032008-5.

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования. Учебник включает трёхуровневую систему задач, а также исследовательские задачи, темы рефератов, список рекомендуемой литературы, что позволит учащимся расширить и углубить свои знания по геометрии.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-032008-5

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию и будете заниматься ею шесть лет. Что это такое — геометрия?

Геометрия — одна из самых древних наук, она возникла очень давно, ещё до нашей эры. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей, а в дальнейшем сформировалась как самостоятельная наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.

На уроках математики вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляете себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Вы знакомы с такими фигурами, как треугольник, прямоугольник, окружность, круг и др. (рис. 2); знаете, как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира. Но всё это лишь самые первые геометрические сведения. Теперь вам предстоит расширить и углубить свои знания о геометрических фигурах. Вы познакомитесь с новыми фигурами и со многими важными и интересными свойствами уже известных вам фигур. Вы узнаете о том, как используются свойства геометрических фигур в практической деятельности. Во всём этом вам помогут учебник и, конечно, учитель.

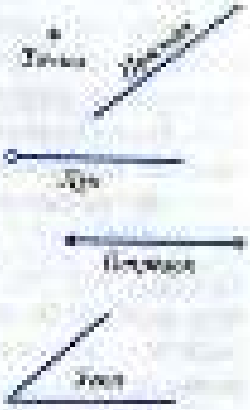


Рис. 1

Рис. 2

Школьный курс геометрии делится на планиметрию и стереометрию. В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнём изучение геометрии с планиметрии.

В процессе изучения геометрии вы будете доказывать теоремы и решать задачи. Что такое «теорема» и что значит «доказать теорему» — об этом вы скоро узнаете. Ну а что такое задача — вам понятно, на уроках математики вы решали разные задачи.

В нашем учебнике геометрии много задач: есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Основными являются задачи к параграфу. Более трудные задачи отмечены звёздочкой. Задачи, отмеченные знаком, имеют электронную версию[1]. В конце книги к задачам даны ответы и указания.

Всем, кто проявит интерес к геометрии, кому понравится решать задачи и доказывать теоремы, мы советуем порешать не только обязательные задачи, но и задачи со звёздочкой, дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Решить такие задачи непросто, но интересно. Не всегда удаётся сразу найти решение. В таком случае не унывайте, а проявите терпение и настойчивость. Радость от решения трудной задачи будет вам наградой за упорство. Не бойтесь заглядывать вперёд, читать те параграфы, которые ещё не проходили в классе. Задавайте вопросы учителю, товарищам, родителям.

Доброго вам пути, ребята!

Прямоугольный параллелепипед

Шар

Цилиндр

Рис. 3

[1] Единая коллекция ЦОР. Набор ЦОР к учебнику «Геометрия. 7—9 классы» авторов Л. С. Атанасяна и др. Электронный адрес school-collection.edu.ru.

Глава I

Начальные геометрические сведения

В этой главе речь пойдёт о простейших геометрических фигурах — точках, прямых, отрезках, лучах, углах. С ними вы познакомились на уроках математики в 5 и 6 классах. К тому, что вы знаете об этих фигурах, мы добавим новые сведения, и они послужат нам опорой для изучения в следующих главах свойств более сложных фигур. Ещё мы расскажем о практических приложениях геометрии — о том, как геометрия помогает прокладывать прямолинейные дороги и как проводятся измерения углов на местности.

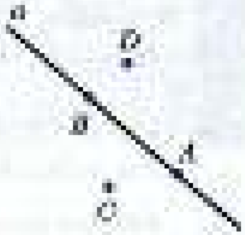
§ 1 Прямая и отрезок

1 Точки, прямые, отрезки

Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны.

Рис. 4

Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A, B, C и D. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B, но не проходит через точки C и D. Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a. Вообще,



Прямая a и точки

Рис. 5

через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну[1].

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

Рассмотрим теперь две прямые. Если они имеют общую точку, то говорят, что эти прямые пересекаются. На рисунке 6 прямые a и b пересекаются в точке O, а прямые p и q не пересекаются. Две прямые не могут иметь двух и более общих точек. В самом деле, если бы две прямые имели две общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: **две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.**

Рис. 6

Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B, иногда обозначают двумя буквами: AB или BA. Для краткости вместо слов «точка A лежит на прямой a» используют запись $A \in a$, а вместо слов «точка B не лежит на прямой a» — запись $B \notin a$.

На рисунке 7, а выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**. На рисунке 7, б изображён отрезок с концами A и B. Такой отрезок обозначается AB или BA. Отрезок AB содержит точки A и B и все точки прямой AB, лежащие между A и B.

Рис. 7

2 Провешивание прямой на местности

Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить отрезок более длинный, чем сама линейка. С этой целью приложим к листу бумаги линейку, отметим точки A и B и какую-нибудь точку C, лежащую между A и B (рис. 8, а). Затем

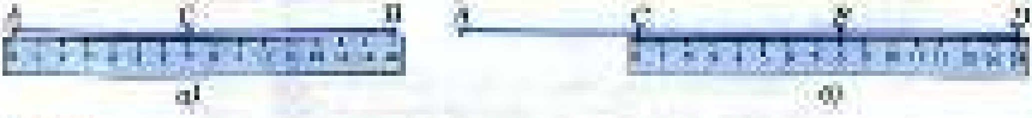


Рис. 8

передвинем линейку вправо так, чтобы её левый конец оказался около точки C, и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 8, б). Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Если мы проведём теперь отрезок AB, а затем отрезок BD, то получим отрезок AD, более длинный, чем линейка.

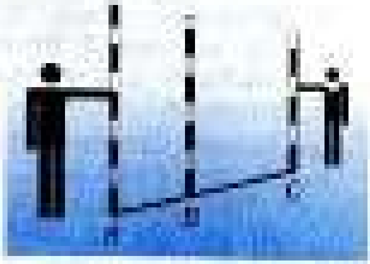
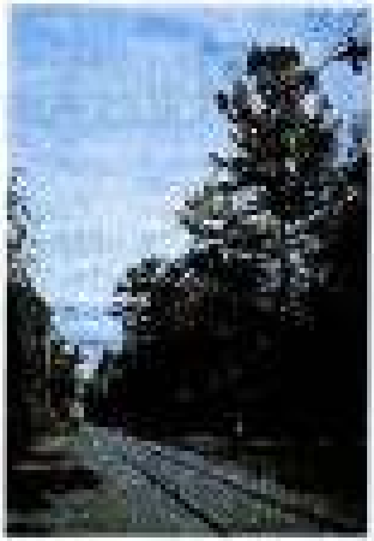


Рис. 9

Аналогичный приём используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Этот приём заключается в следующем. Сначала отмечают какие-нибудь точки A и B. Для этой цели используют две вехи — шесты длиной около 2 м, заострённые на одном конце для того, чтобы их можно было воткнуть в землю. Третью веху ставят так, чтобы вехи, стоящие в точках A и B, закрывали её от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 9). Следующую веху ставят так, чтобы её закрывали вехи, стоящие в точках B и C, и т. д.

Описанный приём называется **провешиванием прямой** (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании шоссейных или железных дорог, линий высоковольтных передач и т. д.



Практические задания

1. Проведите прямую, обозначьте её буквой a и отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки P, Q и R, не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a, используя символы $\in$ и $\notin$.
2. Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и проведите прямые AB, BC и CA.
3. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

4 Отметьте точки A, B, C, D так, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?

5 Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте: а) точки M и N, лежащие на отрезке AB; б) точки P и Q, лежащие на прямой a, но не лежащие на отрезке AB; в) точки R и S, не лежащие на прямой a.

6 Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

7 На рисунке 10 изображена прямая, на ней отмечены точки A, B, C и D. Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C; б) на которых не лежит точка B.

Рис. 10

§2 Луч и угол

3 Луч

Проведём прямую a и отметим на ней точку O (рис. 11). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется лучом, исходящим из точки O (на рисунке 11 один из лучей выделен цветной линией). Точка O называется началом каждого из лучей. Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 12, а), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 12, б).

Точка O разделяет прямую на два луча

Рис. 11

Луч h

а)

Луч OA

б)

Рис. 12

4 Угол

Напомним, что угол — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются сторонами угла, а их общее начало — вершиной угла.

На рисунке 13 изображён угол с вершиной O и сторонами h и k. На сторонах отмечены точки A и B. Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

Угол называется **развёрнутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой. Можно сказать, что каждая сторона развёрнутого угла является продолжением другой стороны. На рисунке 14 изображён развёрнутый угол с вершиной C и сторонами p и q.

Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвёрнутый, то одна из частей называется **внутренней**, а другая — **внешней** областью этого угла (рис. 15, *а*). На рисунке 15, *б* изображён неразвёрнутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла).

Если угол развёрнутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла. На рисунке 16, *а* луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Если угол AOB развёрнутый, то любой луч OC, не совпадающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла: AOC и COB (рис. 16, *б*).

Рис. 13

Рис. 14

Рис. 15

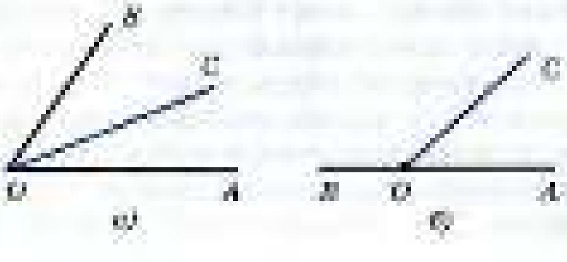


Рис. 16

Луч OC делит угол AOB на два угла $\angle AOC$ и $\angle COB$

Практические задания

8 Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C. а) Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA назовите совпадающие лучи; б) назовите луч, который является продолжением луча CA.

9 Начертите три неразвёрнутых угла и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.

10 Начертите два развёрнутых угла и обозначьте их буквами.

11 Начертите три луча h, k и l с общим началом. Назовите все углы, образованные данными лучами.

12 Начертите неразвёрнутый угол hk. Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.

13 Начертите неразвёрнутый угол. Отметьте точки A, B, M и N так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка MN лежали вне угла.

14 Начертите неразвёрнутый угол AOB и проведите: а) луч OC, который делит угол AOB на два угла; б) луч OD, который не делит угол AOC на два угла.

15 Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении двух прямых?

16 Какие из точек, изображённых на рисунке 17, лежат внутри угла hk, а какие — вне этого угла?

17 Какие из лучей, изображённых на рисунке 18, делят угол AOB на два угла?

Рис. 17

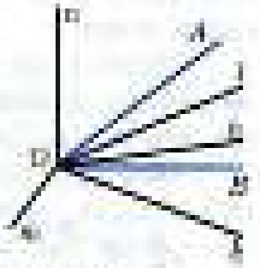


Рис. 18

§3 Сравнение отрезков и углов

5 Равенство геометрических фигур

Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Например, два одинаковых листа бумаги, две одинаковые книги, два одинаковых автомобиля. В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

На рисунке 19 изображены фигуры $Φ_1$ и $Φ_2$. Чтобы установить, равны они или нет, поступим так. Скопируем фигуру $Φ_1$ на кальку. Передвигая кальку и накладывая её на фигуру $Φ_2$ той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры $Φ_1$ с фигурой $Φ_2$. Если они совместятся, то фигура $Φ_1$ равна фигуре $Φ_2$.

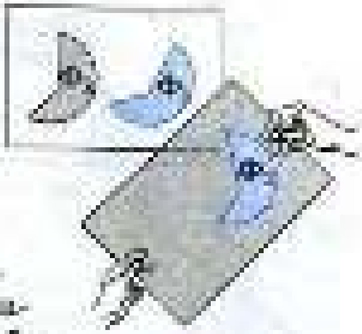


Рис. 19

Мы можем представить себе, что на фигуру $Φ_2$ накладывается не копия фигуры $Φ_1$, равная этой фигуре, а сама фигура $Φ_1$. Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.

6 Сравнение отрезков и углов

На рисунке 20, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 20, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 20, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB, поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC < AB$).

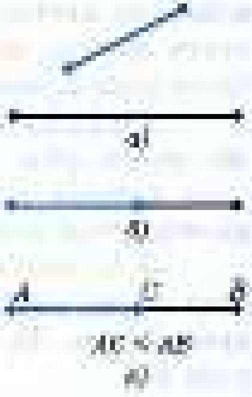
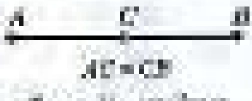


Рис. 20

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется серединой отрезка. На рисунке 21 точка C — середина отрезка AB.



$AC = CB$

Точка C — середина отрезка AB

Рис. 21

На рисунке 22, *а* изображены неразвёрнутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 22, *б*).

Рис. 22

а) б)

Рис. 23

Неразвёрнутый угол COB составляет часть развёрнутого угла AOB

$\angle hl = \angle lk$
Луч l – биссектриса угла hk

Рис. 24

Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 22, б угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

Неразвёрнутый угол составляет часть развёрнутого угла (рис. 23), поэтому развёрнутый угол больше неразвёрнутого угла. Любые два развёрнутых угла, очевидно, равны.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой угла**. На рисунке 24 луч l — биссектриса угла hk.

Задачи

18 На луче с началом O отмечены точки A, B и C так, что точка B лежит между точками O и A, а точка A — между точками O и C. Сравните отрезки OB и OA, OC и OA, OB и OC.

19 Точка O является серединой отрезка AB. Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB; б) OA и AB?

Рис. 25

20 □ На рисунке 25 отрезки AB, BC, CD и DE равны. Укажите: а) середину отрезка AC,

AE и CE; б) отрезок, серединой которого является точка D; в) отрезки, серединой которых является точка C.

21 Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC.

22 Луч l — биссектриса угла hk. Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk; б) hl и hk?

23 На рисунке 26 углы, обозначенные цифрами, равны. Укажите: а) биссектрису каждого из углов AOC, BOF, AOE; б) все углы, биссектрисой которых является луч OC.

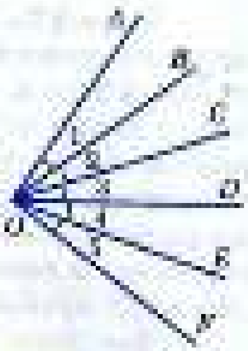


Рис. 26

§ 4 Измерение отрезков

7 Длина отрезка

На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за единицу измерения (его называют также масштабным отрезком). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 27 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно два раза. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 27 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см.

$AB = 2$ см, $AC = 3{,}4$ см, $AD = 3{,}8$ см

Рис. 27

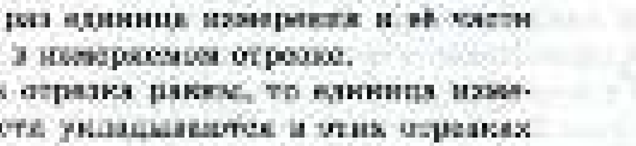
Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 27, в котором сантиметр укладывается три раза с остатком, и в остатке миллиметр укладывается восемь раз опять с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближённо равна 3,8 см.

Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со всё большей точностью. На практике, однако, пользуются приближёнными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. **Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.** Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и её части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. **равные отрезки имеют равные длины**. Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или её часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. **меньший отрезок имеет меньшую длину**.

На рисунке 28 изображён отрезок AB. Точка C делит его на два отрезка: AC и CB. Мы видим, что $AC = 3$ см, $CB = 2,7$ см, $AB = 5,7$ см.



$AC + CB = AB$

Рис. 28

Таким образом, $AC+CB=AB$. Ясно, что и во всех других случаях, когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.

Если длина отрезка CD в k раз больше длины отрезка AB, то пишут $CD=kAB$.

Длина отрезка называется также расстоянием между концами этого отрезка.

8 Единицы измерения. Измерительные инструменты

Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения отрезков выбран метр — отрезок, приближённо равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в России. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображёнными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояние между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах, расстояние между населёнными пунктами — в километрах. Используются и другие единицы измерения, например дециметр, морская миля (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают световой год, т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.

Мы назвали единицы измерения расстояний, которые используются на практике в наше время. В старину в разных странах существовали

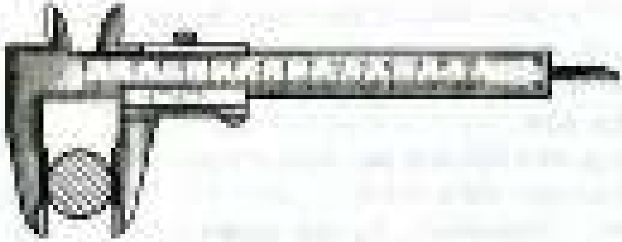


Рис. 29

Рис. 30

свои единицы измерения. Так, на Руси использовались аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м) и др.

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется **масштабная миллиметровая линейка**. Для измерения диаметра трубки используют **штангенциркуль** (рис. 29). С его помощью можно измерить расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются **рулеткой**, которая представляет собой ленту с нанесёнными на ней делениями (рис. 30).

Практические задания

Рис. 31

24 Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.

25 Измерив толщину учебника геометрии без обложки, найдите толщину одного листа.

26 Найдите длины всех отрезков, изображённых на рисунке 31, если за единицу измерения принят отрезок: а) KL; б) AB.

27 Начертите отрезок AB и луч h. Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.

28 Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B. С помощью масштабной линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC, а точка D — серединой отрезка BC.

29 Начертите прямую AB. С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C, такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB?

Задачи

30 □ Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB = 7{,}8$ см, $BC = 25$ мм.

31 □ Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC, если:
а) $AB = 3{,}7$ см, $AC = 7{,}2$ см;
б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.

32 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

33 □ Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM?

34 Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

35 Расстояние между Москвой и С.-Петербургом равно 650 км. Город Тверь находится между Москвой и С.-Петербургом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и С.-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

36 Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

Решение

Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB + BC$) равна 7 см. Поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

37 Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC. Найдите:
а) AC, CB, AO и OB, если $AB = 2$ см;
б) AB, AC, AO и OB, если $CB = 3{,}2$ м.

38 □ На прямой отмечены точки O, A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB, если точка O:
а) лежит на отрезке AB;
б) не лежит на отрезке AB.

39 Отрезок, длина которого равна a, разделён произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

40 □ Отрезок, равный 28 см, разделён на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

9 Градусная мера угла

Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают градус — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла. Эта единица измерения углов была введена много веков назад, ещё до нашей эры.

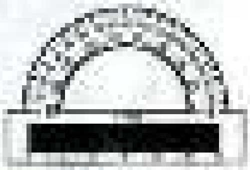


Рис. 32

Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла**. Для измерения углов используется транспортир (рис. 32).

На рисунке 33, *а* изображен угол AOB, градусная мера которого равна $150°$. Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен $150°$» — и пишут: $\angle AOB = 150°$. На рисунке 33, *б* угол hk равен $40°$ ($\angle hk = 40°$). Определённые части градуса носят специальные названия: $\frac{1}{60}$ часть градуса называется **минутой**, $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой**. Минуты обозначают знаком «′», а секунды — знаком «″». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: $60°32'17''$.

Рис. 33

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. **равные углы имеют равные градусные меры**.

Если же один угол меньше другого, то в нём градус (или его часть) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. **меньший угол имеет меньшую градусную меру**.

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого угла, то он укладывается в развёрнутом угле ровно 180 раз, т. е. развёрнутый угол равен 180°.

Неразвёрнутый угол меньше развёрнутого угла, поэтому неразвёрнутый угол меньше 180°.

На рисунке 34 изображены лучи с началом в точке O. Луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Мы видим, что $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$. Таким образом,

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

Рис. 34

Ясно, что и во всех других случаях, когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.

Угол называется прямым, если он равен 90° (рис. 35, а), острым, если он меньше 90°, т. е. меньше прямого угла (рис. 35, б), тупым, если он больше 90°, но меньше 180°, т. е. больше прямого, но меньше развёрнутого угла (рис. 35, в).

Прямой угол а) Острый угол б) Тупой угол в)

Рис. 35

Прямые углы мы видим в окружающей нас обстановке: прямой угол образуют линии пересечения стен и потолка в комнате, два края стола прямоугольной формы и т. д.

10 Измерение углов на местности

Измерение углов на местности проводится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является астролябия (рис. 36). Она состоит из двух частей: диска, разделённого на градусы, и вращающейся вокруг центра

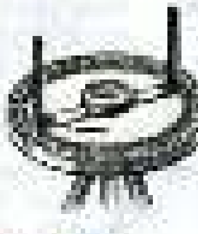


Рис. 36

диска линейка (алидада). На концах алидады находятся две узкие прорези, которые используются для установки её в определённом направлении.

Для того чтобы измерить угол AOB на местности, треножник с астролябией ставят так, чтобы отвес, подвешенный к центру диска, находился точно над точкой O. Затем устанавливают алидаду вдоль одной из сторон OA или OB и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя её вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады. Разность отсчётов и даёт градусную меру угла AOB.

Измерения углов проводятся в различных исследованиях, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения искусственных спутников на орбитах. Для этой цели конструируют специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на электронно-вычислительных машинах (компьютерах).

Практические задания

41 Начертите три неразвёрнутых угла и один развёрнутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle M$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результаты измерений.

42 Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB, AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 55°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 135°$.

43 Начертите угол, равный 70°, и с помощью транспортира проведите его биссектрису.

44 Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC. Всегда ли это выполнимо?

Задачи

45 ☐ Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

46 На рисунке 37 изображены лучи с общим началом O.
а) Найдите градусные меры углов AOX, BOX, AOB, COB, DOX;
б) назовите углы, равные 30°;
в) назовите равные углы;
г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

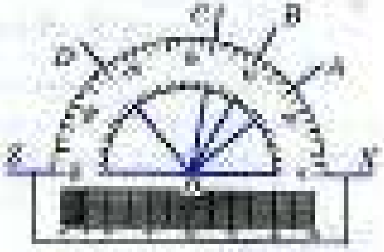


Рис. 37

47 ☐ Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите $\angle AOB$, если:
а) $\angle AOE = 44^\circ$, $\angle EOB = 77^\circ$;
б) $\angle AOE = 12^\circ 37'$, $\angle EOB = 108^\circ 25'$.

48 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 78^\circ$, а угол AOC на 18° меньше угла BOC.

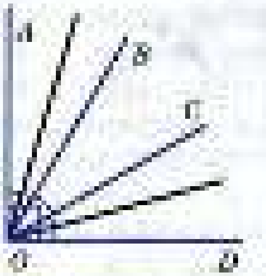


Рис. 38

49 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC, если $\angle AOB = 155^\circ$, а угол AOC на 15° больше угла COB.

50 ☐ Угол AOB является частью угла AOC. Известно, что $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол AOB.

51 ☐ На рисунке 38 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD.

52 На рисунке 39 луч OV является биссектрисой угла ZOY, а луч OU — биссектрисой угла XOY. Найдите угол XOZ, если $\angle UOV = 80^\circ$.

53 Луч l является биссектрисой неразвёрнутого угла hk. Может ли угол hl быть прямым или тупым?

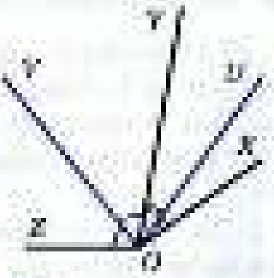


Рис. 39

§6 Перпендикулярные прямые

11 Смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

На рисунке 40 углы AOB и BOC смежные. Так как лучи OA и OC образуют развёрнутый угол, то

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180^\circ.$$

Рис. 40

Таким образом, **сумма смежных углов равна 180°.**

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

Рис. 41

На рисунке 41 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$, $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$. Таким образом, градусные меры углов 1 и 3 равны. Отсюда следует, что и сами углы равны.

Итак, вертикальные углы равны.

12 Перпендикулярные прямые

Рассмотрим две пересекающиеся прямые (рис. 42). Они образуют четыре неразвёрнутых угла. Если один из них прямой (угол 1), то остальные углы также прямые (объясните почему).

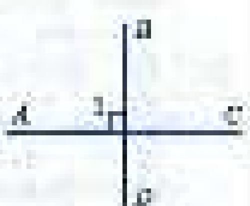


Рис. 42

Две пересекающиеся прямые называются **перпендикулярными** (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD»).

Отметим, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются (рис. 43, *а*).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 43, *б*). Мысленно перегнём рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично, луч QB наложится на луч QB_1.

Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 43, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертёжный угольник и линейку (рис. 44).

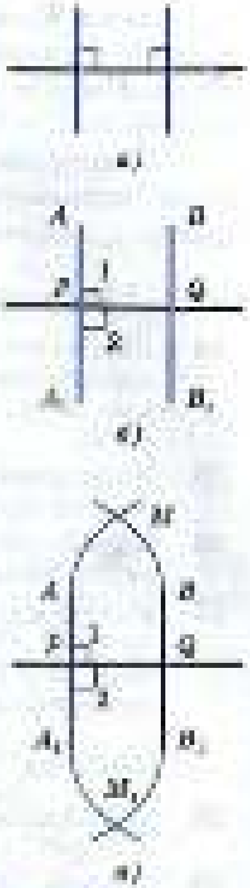


Рис. 43

13 Построение прямых углов на местности

Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является экер.

Экер представляет собой два бруска, расположенных под прямым углом и укреплённых на треножнике (рис. 45). На концах брусков вбиты гвозди так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны.

Чтобы построить на местности прямой угол с заданной стороной OA, устанавливают треножник с экером так, чтобы отвес находился точно над точкой O, а направление одного бруска совпало с направлением луча OA. Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью вехи, поставленной на луче.

Рис. 44

Построение перпендикулярных прямых

Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 45). Получается прямой угол AOB.

В геодезии для построения прямых углов используют более совершенные приборы, например теодолит.

Рис. 45

Практические задания

54 Начертите острый угол AOB и на продолжении луча OB отметьте точку D. Сравните углы AOB и AOD.

55 Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.

56 Начертите неразвёрнутый угол hk. Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.

57 Начертите неразвёрнутый угол MON и отметьте точку P внутри угла и точку Q — вне его. С помощью чертёжного угольника и линейки через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON.

Задачи

58 □ Найдите угол, смежный с углом ABC, если:
а) $\angle ABC = 111°$; б) $\angle ABC = 90°$; в) $\angle ABC = 15°$.

59 □ Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

60 □ Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

61 Найдите смежные углы hk и kl, если:
а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на $40°$;
б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $120°$;
в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47°18'$;
г) $\angle hk = 3\angle kl$;
д) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$.

62 На рисунке 46 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD, если $\angle COB = 148°$.

63 Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

64 □ Найдите изображённые на рисунке 41 углы:
а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117°$;
б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43°27'$.

Рис. 46

65 Найдите неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если: а) сумма двух из них равна 114°; б) сумма трёх углов равна 220°.

66 На рисунке 46 найдите углы 1, 2, 3, 4, если:
а) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$;
б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$;
в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.


Рис. 47

67 На рисунке 47 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

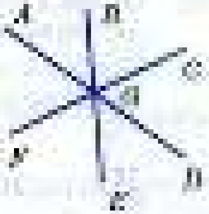


Рис. 48

68 На рисунке 48 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

69 Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q. Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a?

70 Через точку A, не лежащую на прямой a, проведены три прямые, пересекающие прямую a. Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a.

Вопросы для повторения к главе I

1 Сколько прямых можно провести через две точки?
2 Сколько общих точек могут иметь две прямые?
3 Объясните, что такое отрезок.
4 Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?
5 Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла.
6 Какой угол называется развёрнутым?
7 Какие фигуры называются равными?
8 Объясните, как сравнить два отрезка.
9 Какая точка называется серединой отрезка?
10 Объясните, как сравнить два угла.
11 Какой луч называется биссектрисой угла?
12 Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB, если известны длины отрезков AC и CB?
13 Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?
14 Что такое градусная мера угла?
15 Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти градусную меру угла AOB, если известны градусные меры углов AOC и COB?

16 Какой угол называется острым? прямым? тупым?

17 Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов?

18 Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы?

19 Какие прямые называются перпендикулярными?

20 Объясните, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.

21 Какие приборы применяют для построения прямых углов на местности?

Дополнительные задачи

71 Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько получилось прямых?

72 Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

73 Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении трёх прямых, проходящих через одну точку?

74 Точка N лежит на отрезке MP. Расстояние между точками M и P равно 24 см, а расстояние между точками N и M в два раза больше расстояния между точками N и P. Найдите расстояние:
а) между точками N и P;
б) между точками N и M.

75 Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL = 6$ см, $LM = 10$ см. Каким может быть расстояние KM? Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

76 Отрезок AB длины a разделён точками P и Q на три отрезка AP, PQ и QB так, что $AP = 2PQ = 2QB$. Найдите расстояние между:
а) точкой A и серединой отрезка QB;
б) серединами отрезков AP и QB.

77 Отрезок длины m разделён:
а) на три равные части;
б) на пять равных частей.
Найдите расстояние между серединами крайних частей.

78 Отрезок в 36 см разделён на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

79* □ Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

80 Известно, что $\angle AOB = 35°$, $\angle BOC = 50°$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж с помощью линейки и транспортира.

81 Угол hk равен $120°$, а угол hm равен $150°$. Найдите угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

82 Найдите смежные углы, если:
а) один из них на $45°$ больше другого;
б) их разность равна $35°$.

83 Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

84 Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

85* □ Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

86 □ Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.

Глава II

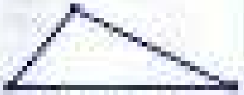
Треугольники

В этой главе вы начнёте изучение свойств треугольников и окружностей. Треугольник — одна из самых простых и вместе с тем самых важных фигур в геометрии. То же самое можно сказать об окружности. Оказывается, что эти простые фигуры таят в себе много интересного и неожиданного. Различные их свойства вы будете изучать на протяжении всего курса геометрии. При этом мы будем формулировать и доказывать теоремы. Что такое теорема и что значит доказать теорему, вы узнаете в данной главе, где появятся первые теоремы о треугольниках.

§1 Первый признак равенства треугольников

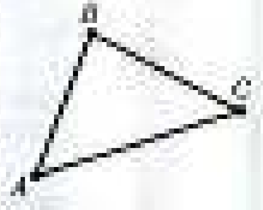
14 Треугольник

Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 49, а). Получим геометрическую фигуру, которая называется треугольником. Отмеченные три точки называются **вершинами**, а отрезки — **сторонами** треугольника. На рисунке 49, б изображён треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA. Такой треугольник будем обозначать так: $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»). Этот же треугольник можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C в другом порядке: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.



Треугольник

а)



Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA

б)

Рис. 49

Три угла — $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ — называются **углами треугольника** ABC. Часто их обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром**.

Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением. На рисунке 50 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников.

Таким образом, если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.

Отметим, что в равных треугольниках против соответственно равных сторон (т. е. совмещающихся при наложении) лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны. Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображённых на рисунке 50, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

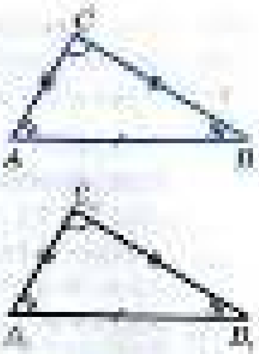


Рис. 50

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, не накладывая один треугольник на другой, а сравнивая только некоторые их элементы. Как это сделать, мы обсудим в следующих пунктах.

Такая возможность — установить равенство двух фигур, не производя наложения одной на другую, а измеряя и сравнивая лишь некоторые элементы этих фигур, важна для практики, например для сравнения двух земельных участков, которые, конечно, нельзя наложить друг на друга.

15 Первый признак равенства треугольников

В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путём рассуждений, называется **теоремой**, а сами рассуждения называются **доказательством теоремы**. Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы. В этом параграфе мы докажем одну из теорем о равенстве треугольников.

Теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы A и A_1 равны (рис. 51). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. Теорема доказана.

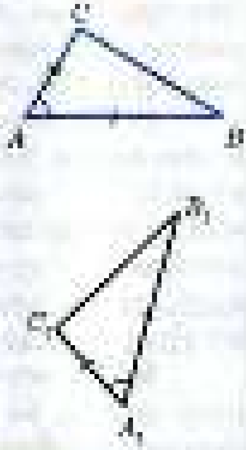


Рис. 51

Доказанная теорема выражает признак (равенство у треугольников двух сторон и угла между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников. Он называется **первым признаком равенства треугольников.**

Практические задания

87 Начертите треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N и P. а) Назовите все углы и стороны треугольника; б) с помощью масштабной линейки измерьте стороны и найдите периметр треугольника.

88 Начертите треугольник DEF так, чтобы угол E был прямым. Назовите: а) стороны, лежащие против углов D, E, F; б) углы, лежащие против сторон DE, EF, FD; в) углы, прилежащие к сторонам DE, EF, FD.

89 С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC, в котором: а) $AB = 4{,}8$ см, $AC = 2{,}3$ см, $\angle A = 63^\circ$; б) $BC = 8$ см, $BA = 6{,}2$ см, $\angle B = 122^\circ$; в) $CA = 3$ см, $CB = 4$ см, $\angle C = 90^\circ$.

Задачи

90 ☐ Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

91 ☐ Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

92 ☐ Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

93 ☐ Отрезки AE и DC пересекаются в точке B, являющейся серединой каждого из них. а) Докажите, что треугольники ABC и EBD равны; б) найдите углы A и C треугольника ABC, если в треугольнике BDE $\angle D = 47^\circ$, $\angle E = 42^\circ$.

94 ☐ На рисунке 62 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABD и ACD равны; б) найдите BD и AB, если $AC = 15$ см, $DC = 5$ см.

95 ☐ На рисунке 63 $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABC и CDA равны; б) найдите AB и BC, если $AD = 17$ см, $DC = 14$ см.

96 ☐ На рисунке 64 $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74^\circ$, $\angle 2 = 36^\circ$. а) Докажите, что треугольники AOB и DOC равны; б) найдите $\angle ACD$.

97 ☐ Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

98 ☐ В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

99 ☐ На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E — на отрезке AD, причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

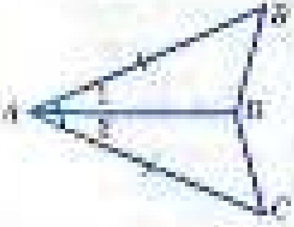


Рис. 62

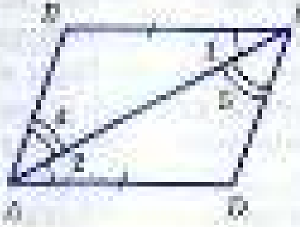


Рис. 63

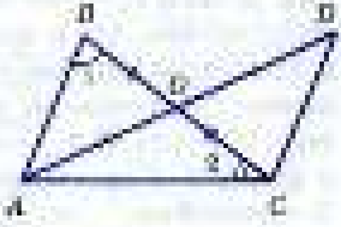
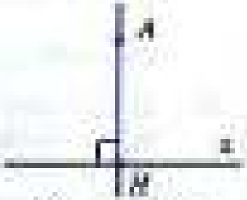


Рис. 64

§ 2 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

16 Перпендикуляр к прямой

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой (рис. 55). Соединим точку A отрезком с точкой H прямой a. Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой a**, если прямые AH и a перпендикулярны. Точка H называется **основанием перпендикуляра**.



Отрезок AH — перпендикуляр к прямой a

Рис. 55

Теорема

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Доказательство

Пусть A — точка, не лежащая на прямой BC (рис. 56, а). Докажем сначала, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой BC.

Отложим от луча BC угол MBC, равный углу ABC, как показано на рисунке 56, а. Так как углы ABC и MBC равны, то первый из них можно наложить на второй так, что стороны BA и BC первого угла совместятся со сторонами BM и BC второго угла. Наглядно это наложение можно представить себе как перегибание рисунка по прямой BC. При этом точка A наложится на некоторую точку A_1 луча BM (рис. 56, б). Обозначим буквой H точку пересечения прямых AA_1 и BC. Отрезок AH и есть искомый перпендикуляр к прямой BC. В самом деле, при указанном наложении (перегибании рисунка) луч HA совмещается с лучом HA_1, поэтому угол 1 совмещается с углом 2. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — смежные, значит, каждый из них прямой. Итак, $AH \perp BC$.

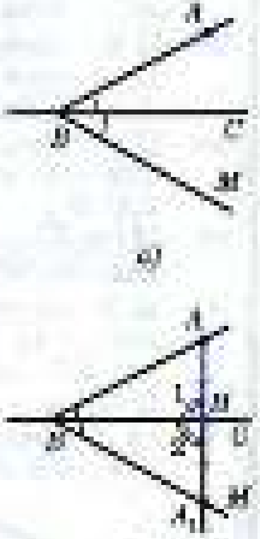


Рис. 56

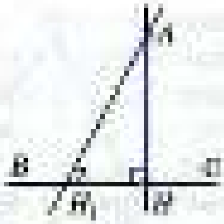
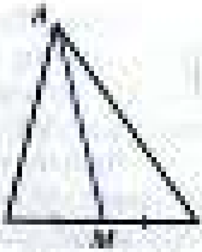


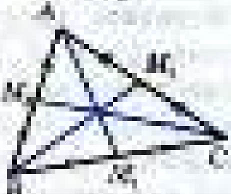
Рис. 57

Рис. 58



AM — медиана треугольника

а)



AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC

б)

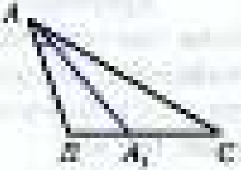
Рис. 59

Докажем теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC.

Если предположить, что через точку A можно провести ещё один перпендикуляр AH_1 к прямой BC, то получим, что две прямые AH и AH_1, перпендикулярные к прямой BC, пересекаются (рис. 57). Но в п. 12 было доказано, что это невозможно. Итак, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC. Теорема доказана.

Для проведения на чертеже перпендикуляра из точки к прямой используют чертёжный угольник (рис. 58).

17 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника



AA_1 — биссектриса треугольника ABC

а)

CC_1, DD_1, EE_1 — биссектрисы треугольника CDE

б)

Рис. 60

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника** (рис. 59, а).

Любой треугольник имеет три медианы. На рисунке 59, б отрезки AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC.

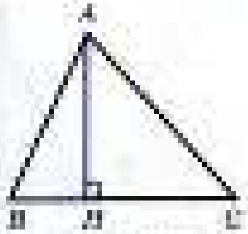
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника** (рис. 60, а).

Любой треугольник имеет три биссектрисы. На рисунке 60, б отрезки CC_1, DD_1 и EE_1 — биссектрисы треугольника CDE.

Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника** (рис. 61).

Любой треугольник имеет три высоты. На рисунках 62, а, б, в отрезки AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC.

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника обладают замечательными свойствами:



AH — высота треугольника ABC

Рис. 61

Медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 59, б);
биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 60, б);
высоты треугольника или их продолжения также пересекаются в одной точке (рис. 62, а, б, в).

Эти утверждения мы докажем в 8 классе.

18 Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Равные стороны называются **боковыми сторонами**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника (рис. 63, а).

Треугольник, все стороны которого равны, называется **равносторонним** (рис. 63, б).

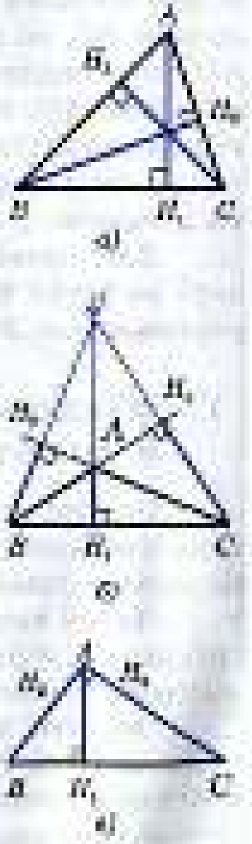
Докажем две теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

Теорема

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$.



AH_1, BH_2, CH_3 — высоты $\triangle ABC$

Рис. 62

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 64). Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle B = \angle C$. Теорема доказана.

Рис. 63

Теорема

В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство

Обратимся снова к рисунку 64, на котором $\triangle ABC$ — равнобедренный треугольник с основанием BC, AD — его биссектриса.

Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что $BD = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Равенство $BD = DC$ означает, что точка D — середина стороны BC, и поэтому AD — медиана треугольника ABC. Так как углы 3 и 4 — смежные и равны друг другу, то они прямые. Следовательно, отрезок AD является также высотой треугольника ABC. Теорема доказана.

Мы установили, что биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведённые к основанию, совпадают. Поэтому справедливы также утверждения:

1. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.
2. Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

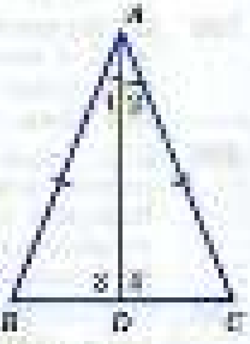


Рис. 64

Практические задания

100 Начертите прямую a и отметьте точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой a. С помощью чертёжного угольника проведите из этих точек перпендикуляры к прямой a.

101 □ Начертите треугольник. С помощью масштабной линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.

102 Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите его биссектрисы.

103 Начертите треугольник ABC с тремя острыми углами и треугольник MNP, у которого угол M тупой. С помощью чертёжного угольника проведите высоты каждого треугольника.

104 Начертите три равнобедренных треугольника так, чтобы угол, лежащий против основания, был:
а) острым; б) прямым; в) тупым.

Задачи

105 □ Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны.
а) Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$;
б) найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

106 □ Медиана AD треугольника ABC продолжена за точку D на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C.
а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$;
б) найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

107 □ В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

108 □ Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

109 □ В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABM равен 24 см.

110 □ Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

111 □ На рисунке 66 $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

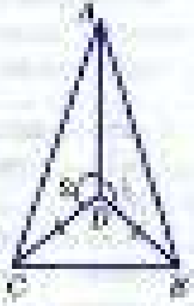


Рис. 66

112 На рисунке 66 $AB = BC$, $\angle 1 = 130°$. Найдите $\angle 2$.

113 Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b. Перпендикуляры MN и PQ, проведённые к прямой b, равны. Точка O — середина отрезка NQ.
а) Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$;
б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105°$.

Рис. 66

114 Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к равным сторонам, равны.

115 Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

116 Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

117 На рисунке 67 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CED$.

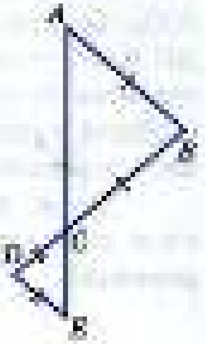


Рис. 67

118 На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что:
а) $\triangle BAM = \triangle CAN$;
б) треугольник AMN равнобедренный.

119 В равнобедренном треугольнике DEK с основанием $DK = 16$ см отрезок EF — биссектриса, $\angle DEF = 43°$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

120 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. На сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle BDE = \triangle BDF$; б) $\triangle ADE = \triangle CDF$.

§3 Второй и третий признаки равенства треугольников

19 Второй признак равенства треугольников

Теорема

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 68). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1, и вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC — на луч B_1C_1. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1 и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C_1. Значит, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, поэтому они равны. Теорема доказана.

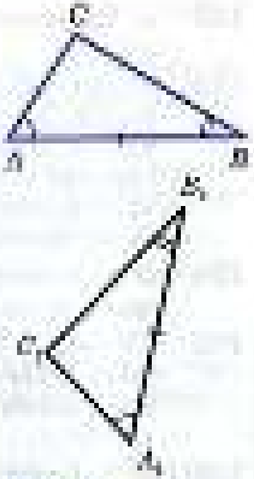


Рис. 68

20 Третий признак равенства треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 69). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с вершиной B_1, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 70).

Возможны три случая: луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, а); луч C_1C совпада-

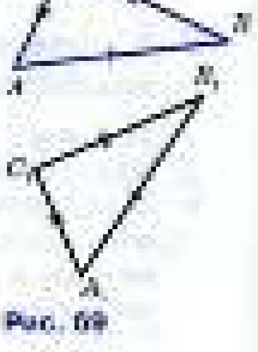


Рис. 69

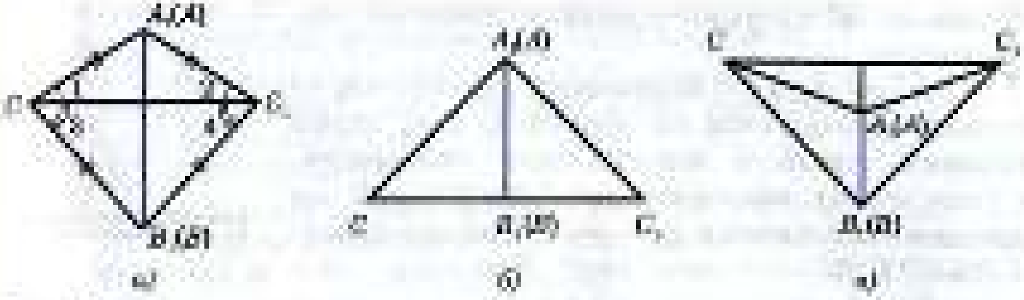


Рис. 70

ет с одной из сторон этого угла (рис. 70, б); луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, в). Рассмотрим первый случай (остальные случаи рассмотрите самостоятельно).

Так как по условию теоремы стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 равны, то треугольники A_1C_1C и B_1C_1C — равнобедренные (см. рис. 70, а). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. Итак, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. **Теорема доказана.**

Из третьего признака равенства треугольников следует, что **треугольник — жёсткая фигура**. Поясним, что это означает.

Представим себе две рейки, у которых два конца скреплены гвоздём (рис. 71, а). Такая конструкция не является жёсткой: сдвигая или раздвигая свободные концы реек, мы можем менять угол между ними. Теперь возьмём ещё одну рейку и скрепим её концы со свободными концами первых двух реек (рис. 71, б).

Полученная конструкция — треугольник — будет уже жёсткой. В ней нельзя сдвинуть или раздвинуть никакие две стороны, т. е. нельзя изменить ни один угол. Действительно, если бы это удалось, то мы получили бы новый треугольник, не равный исходному. Но это невозможно, так как новый треугольник должен быть равен

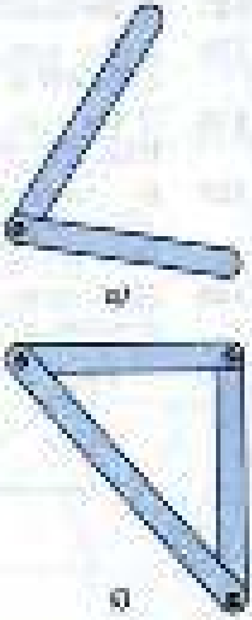
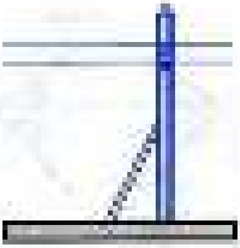


Рис. 71

исходному по третьему признаку равенства треугольников.

Это свойство — жёсткость треугольника — широко используется на практике. Так, чтобы закрепить столб в вертикальном положении, к нему ставят подпорку (рис. 72, а); такой же принцип используется при установке кронштейна (рис. 72, б).



а)

б)

Рис. 72

Задачи

121 Отрезки AB и CD пересекаются в середине O отрезка AB, $\angle OAD = \angle OBC$.
а) Докажите, что $\triangle CBO = \triangle DAO$;
б) найдите BC и CO, если $CD = 26$ см, $AD = 15$ см.

122 На рисунке 59 (см. с. 31) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$;
б) найдите AB и BC, если $AD = 19$ см, $CD = 11$ см.

123 На биссектрисе угла A взята точка D, а на сторонах этого угла — точки B и C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

124 По данным рисунка 73 докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

125 На рисунке 74 $\angle DAC = \angle DBC$, $AO = BO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

126 На рисунке 74 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $AC = 13$ см. Найдите BD.

127 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

128 Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведённые к соответственно равным сторонам, равны.

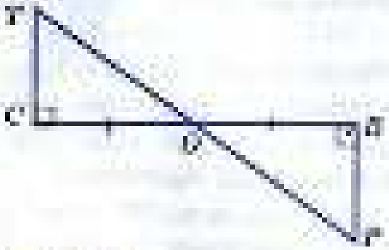


Рис. 73

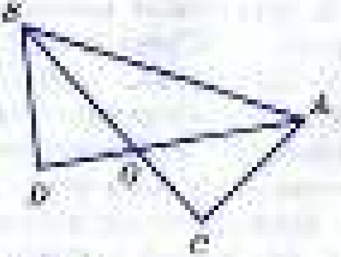


Рис. 74

129 Отрезки AC и BD пересекаются в середине O отрезка AC, $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

130 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CO и C_1O_1 — медианы, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что:
а) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$;
б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$.

131 В треугольниках DEF и MNP $EF = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O, а биссектрисы углов M и N — в точке K. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

132 Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN — равнобедренный.

133 Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный.

134 Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

135 Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.

136 □ На рисунке 52 (см. с. 31) $AB = AC$, $BD = DC$ и $\angle BAC = 50°$. Найдите $\angle CAD$.

137 На рисунке 53 (см. с. 31) $BC = AD$, $AB = CD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

138 На рисунке 75 $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle CAD = \angle ADB$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.

139 На рисунке 76 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что:
а) $\angle ABE = \angle ADF$;
б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

140 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

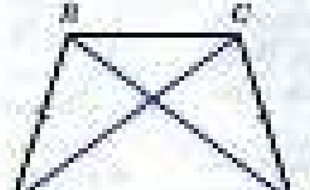


Рис. 75

Рис. 76

141 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

142 Равнобедренные треугольники ADC и BCD имеют общее основание DC. Прямая AB пересекает отрезок CD в точке O. Докажите, что: а) $\angle ADB = \angle ACB$; б) $DO = OC$.

§4 Задачи на построение

21 Окружность

Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется определением. Мы уже встречались с определениями, например с определением угла, смежных углов, равнобедренного треугольника и т. д. Дадим определение ещё одной геометрической фигуры — окружности.

Окружность радиуса r с центром O

Рис. 77

Определение

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.

Данная точка называется **центром окружности**, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, — **радиусом окружности** (рис. 77). Из определения окружности следует, что все радиусы имеют одну и ту же длину.

AB и EF — хорды, CD — диаметр

Рис. 78

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется её **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется её **диаметром**.

На рисунке 78 отрезки AB и EF — хорды окружности, отрезок CD — диаметр окружности. Очевидно, диаметр окружности в два раза больше её радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра.

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой окружности**. На рисунке 79 ALB и AMB — дуги, ограниченные точками A и B.

ALB и AMB — дуги окружности, ограниченные точками A и B

Рис. 79

Для изображения окружности на чертеже пользуются **циркулем** (рис. 80). Чтобы провести окружность на местности, можно воспользоваться верёвкой (рис. 81).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом** (рис. 82).

Проведение окружности с помощью циркуля

Рис. 80

22 Построения циркулем и линейкой

Мы уже имели дело с геометрическими построениями: проводили прямые, откладывали отрезки, равные данным, чертили углы, треугольники и другие фигуры. При этом мы пользовались масштабной линейкой, циркулем, транспортиром, чертёжным угольником.

Построение окружности с помощью верёвки

Рис. 81

Оказывается, что многие построения можно выполнить с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Поэтому в геометрии специально выделяют те задачи на построение, которые решаются с помощью только этих двух инструментов.

Что можно делать с их помощью? Ясно, что линейка позволяет провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две данные точки. С помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку. Выполняя эти несложные операции, мы сможем решить много интересных задач на построение:

построить угол, равный данному;

через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой;

разделить данный отрезок пополам

и другие задачи.

Начнём с простой задачи.

Круг

Рис. 82

Задача

На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.

Решение

Изобразим фигуры, данные в условии задачи: луч OC и отрезок AB (рис. 83, а). Затем циркулем построим окружность радиуса AB с центром O (рис. 83, б). Эта окружность пересечёт луч OC в некоторой точке D. Отрезок OD — искомый.

23 Примеры задач на построение

Построение угла, равного данному

Задача

Отложить от данного луча угол, равный данному.

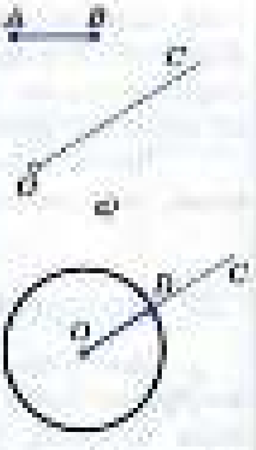
Решение

Данный угол с вершиной A и луч OM изображены на рисунке 84. Требуется построить угол, равный углу A, так, чтобы одна из его сторон совпала с лучом OM.

Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Эта окружность пересекает стороны угла в точках B и C (рис. 85, а). Затем проведём окружность того же радиуса с центром в начале данного луча OM. Она пересекает луч в точке D (рис. 85, б). После этого построим окружность с центром D, радиус которой равен BC. Окружности с центрами O и D пересекаются в двух точках. Одну из этих точек обозначим буквой E. Докажем, что угол MOE — искомый.

Рассмотрим треугольники ABC и ODE. Отрезки AB и AC являются радиусами окружности с центром A, а отрезки OD и OE — радиусами окружности с центром O (см. рис. 85, б). Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $AB = OD$, $AC = OE$. Также по построению $BC = DE$.

Следовательно, $\triangle ABC = \triangle ODE$ по трём сторонам. Поэтому $\angle DOE = \angle BAC$, т. е. построенный угол MOE равен данному углу A.



а)
б)

Рис. 83

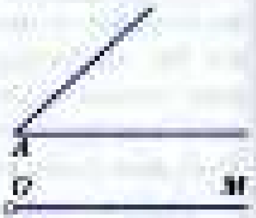
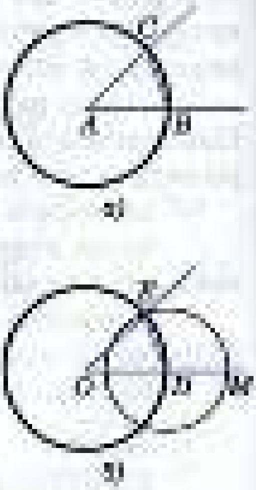


Рис. 84



а)
б)

Рис. 85

То же построение можно выполнить и на местности, если вместо циркуля воспользоваться верёвкой.

Построение биссектрисы угла

Задача

Построить биссектрису данного угла.

Решение

Данный угол BAC изображён на рисунке 86. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A. Она пересечёт стороны угла в точках B и C.

Затем проведём две окружности одинакового радиуса BC с центрами в точках B и C (на рисунке изображены лишь части этих окружностей). Они пересекутся в двух точках, из которых хотя бы одна лежит внутри угла. Обозначим её буквой E. Докажем, что луч AE является биссектрисой данного угла BAC.

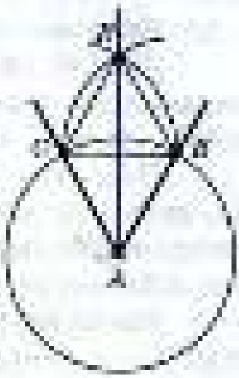


Рис. 86

Рассмотрим треугольники ACE и ABE. Они равны по трём сторонам. В самом деле, AE — общая сторона; AC и AB равны как радиусы одной и той же окружности; $CE = BE$ по построению.

Из равенства треугольников ACE и ABE следует, что $\angle CAE = \angle BAE$, т. е. луч AE — биссектриса данного угла BAC.

Замечание

Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на два равных угла? Ясно, что можно, — для этого нужно провести биссектрису этого угла.

Данный угол можно разделить также на четыре равных угла. Для этого нужно разделить его пополам, а затем каждую половину разделить ещё раз пополам.

А можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на три равных угла? Эта задача, получившая название задачи о трисекции угла, в течение многих веков привлекала внимание математиков. Лишь в XIX веке было доказано, что для произвольного угла такое построение невозможно.

Построение перпендикулярных прямых

Задача

Даны прямая и точка на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

Решение

Данная прямая a и данная точка M, принадлежащая этой прямой, изображены на рисунке 87.

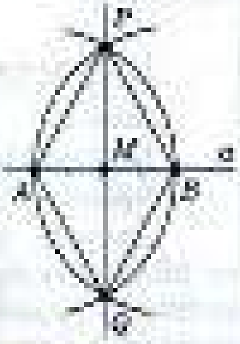


Рис. 87

На лучах прямой a, исходящих из точки M, отложим равные отрезки MA и MB. Затем построим две окружности с центрами A и B радиуса AB. Они пересекаются в двух точках: P и Q.

Проведём прямую через точку M и одну из этих точек, например прямую MP (см. рис. 87), и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. что она перпендикулярна к данной прямой a.

В самом деле, так как медиана PM равнобедренного треугольника PAB является также высотой, то $PM \perp a$.

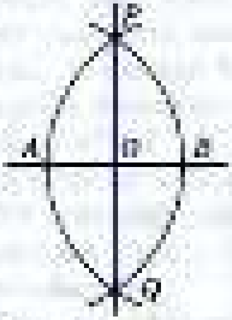


Рис. 88

Построение середины отрезка

Задача

Построить середину данного отрезка.

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами A и B радиуса AB (рис. 88). Они пересекаются в точках P и Q. Проведём прямую PQ. Точка O пересечения этой прямой с отрезком AB и есть искомая середина отрезка AB.

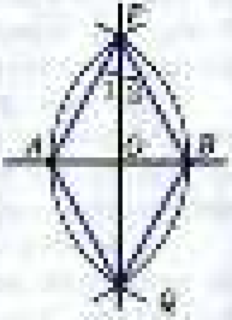


Рис. 89

В самом деле, треугольники APQ и BPQ равны по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 89).

Следовательно, отрезок PO — биссектриса равнобедренного треугольника APB, а значит, и медиана, т. е. точка O — середина отрезка AB.

Задачи

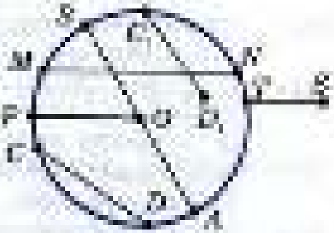


Рис. 90

143 □ Какие из отрезков, изображённых на рисунке 90, являются: а) хордами окружности; б) диаметрами окружности; в) радиусами окружности?

144 Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды BD и AC равны; б) хорды AD и BC равны; в) $\angle BAD = \angle BCD$.

145 □ Отрезок MK — диаметр окружности с центром O, а MP и PK — равные хорды этой окружности. Найдите $\angle POM$.

146 □ Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

147 На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что угол AOB — прямой. Отрезок BC — диаметр окружности. Докажите, что хорды AB и AC равны.

148 □ На прямой даны две точки A и B. На продолжении луча BA отложите отрезок BC так, чтобы $BC = 2AB$.

149 □ Даны прямая a, точка B, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на прямой a так, чтобы $BM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

150 □ Даны окружность, точка A, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на окружности так, чтобы $AM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

151 □ Даны острый угол BAC и луч XY. Постройте угол YXZ так, чтобы $\angle YXZ = 2\angle BAC$.

152 Дан тупой угол AOB. Постройте луч OX так, чтобы углы XOA и XOB были равными тупыми углами.

153 □ Даны прямая a и точка M, не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a.

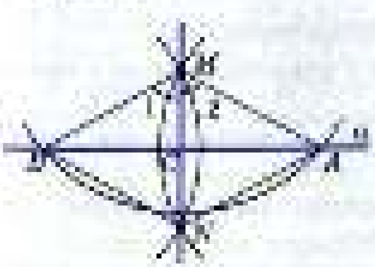


Рис. 91

Решение

Построим окружность с центром в данной точке M, пересекающую данную прямую a в двух точках, которые обозначим буквами A и B (рис. 91). Затем построим две окружности с центрами A и B, проходящие через точку M. Эти окружности пересекаются в точке M и ещё в одной точке, которую обозначим буквой N. Проведём прямую MN и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. она перпендикулярна к прямой a.

В самом деле, треугольники AMN и BMN равны по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что отрезок MC (C — точка пересечения прямых a и MN) является биссектрисой равнобедренного треугольника AMB, а значит, и высотой. Таким образом, $MN \perp AB$, т. е. $MN \perp a$.

154 □ Дан треугольник ABC. Постройте: а) биссектрису AK; б) медиану BM; в) высоту CH треугольника.

155 □ С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 45°; б) 22°30′.

Вопросы для повторения к главе II

1 Объясните, какая фигура называется треугольником. Начертите треугольник и покажите его стороны, вершины и углы. Что такое периметр треугольника?

2 Какие треугольники называются равными?

3 Что такое теорема и доказательство теоремы?

4 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.

5 Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной прямой.

6 Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре, проведённом из данной точки к данной прямой.

7 Какой отрезок называется медианой треугольника? Сколько медиан имеет треугольник?

8 Какой отрезок называется биссектрисой треугольника? Сколько биссектрис имеет треугольник?

9 Какой отрезок называется высотой треугольника? Сколько высот имеет треугольник?

10 Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?

11 Какой треугольник называется равносторонним?

12 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

13 Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника.

14 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак равенства треугольников.

15 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак равенства треугольников.

16 Что такое определение? Дайте определение окружности. Что такое центр, радиус, хорда и диаметр окружности?

17 Объясните, как отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному.

18 Объясните, как отложить от данного луча угол, равный данному.

19 Объясните, как построить биссектрису данного угла.

20 Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку, лежащую на данной прямой, и перпендикулярную к этой прямой.

21 Объясните, как построить середину данного отрезка.

Дополнительные задачи

156 Периметр треугольника ABC равен 15 см. Сторона BC больше стороны AB на 2 см, а сторона AB меньше стороны AC на 1 см. Найдите стороны треугольника.

157 В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

158 Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведённая к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

159 Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника.

160 Прямая a проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Докажите, что: а) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; б) каждая точка, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

161 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $BC = B_1C_1$ и $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

162 На рисунке 92 треугольник ADE равнобедренный, DE — основание. Докажите, что: а) если $BD = CE$, то $\angle CAD = \angle BAE$ и $AB = AC$; б) если $\angle CAD = \angle BAE$, то $BD = CE$ и $AB = AC$.

163 Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

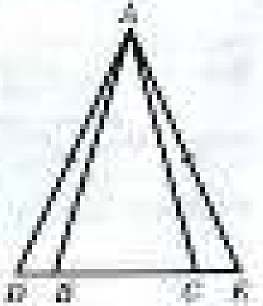


Рис. 92

164 На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF, как показано на рисунке 93. Точки D, E, F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

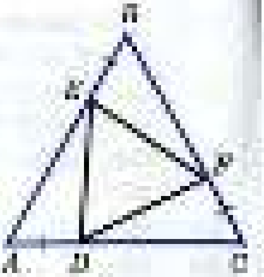


Рис. 93

165 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. На отрезках AC и BD отмечены точки K и K_1 так, что $AK = BK_1$. Докажите, что: а) $OK = OK_1$; б) точка O лежит на прямой KK_1.

166 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. Точки M и N — середины отрезков AC и BD. Докажите, что точка O — середина отрезка MN.

167 Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены, как показано на рисунке 94, на равные отрезки AD, CE, BF. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

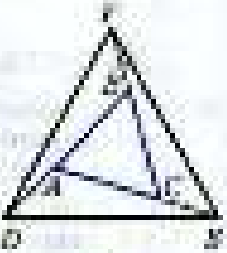


Рис. 94

168 В треугольнике ABC $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 32°$. На стороне AC отмечены точки D и E так, что точка D лежит на отрезке AE, $BD = DA$, $BE = EC$. Найдите угол DBE.

169 На рисунке 95 $OC = OD$, $OB = OE$. Докажите, что $AB = EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке 95), основанный на этой задаче.

170 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AD = A_1D_1$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

171 В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O, $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

172 На рисунке 96 $AC = AD$, $AB \perp CD$. Докажите, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

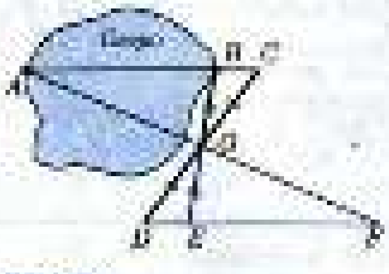


Рис. 95

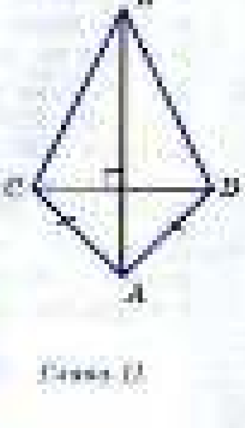


Рис. 96

173* Докажите, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника.

174* Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

175* На сторонах угла XOY отмечены точки A, B, C и D так, что $OA = OB$, $AC = BD$ (рис. 97). Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY. Опишите способ построения биссектрисы угла, основанный на этом факте.

Рис. 97

176* Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников.

177* Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L, а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 так, что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL = K_1L_1$; б) $AL = A_1L_1$.

178* Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка D, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трёх отрезков AD, BD и CD не равны друг другу.

179* На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X — середина основания BC. Докажите, что $BQ = CP$.

180 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

181 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

182 Даны прямая a, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на прямой a и $AC = PQ$.

183 Даны окружность, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на данной окружности и $AC = PQ$.

184 На стороне BC треугольника ABC постройте точку, равноудалённую от вершин A и C.

185 С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.

Глава III

Параллельные прямые

Эта глава посвящена изучению параллельных прямых. Так называются две прямые на плоскости, которые не пересекаются. Отрезки параллельных прямых мы видим в окружающей обстановке — это два края прямоугольного стола, два края обложки книги, две штанги троллейбуса и т. д. Параллельные прямые играют в геометрии очень важную роль. В этой главе вы узнаете о том, что такое аксиомы геометрии и в чём состоит аксиома параллельных прямых — одна из самых известных аксиом геометрии.

§ 1 Признаки параллельности двух прямых

24 Определение параллельных прямых

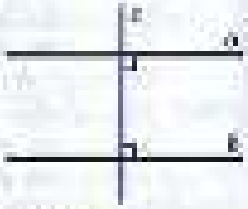


Рис. 98

В п. 1 мы отмечали, что две прямые либо имеют одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются.

Определение

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$.

На рисунке 98 изображены прямые a и b, перпендикулярные к прямой c. В п. 12 мы установили, что такие прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны.

Наряду с параллельными прямыми часто рассматривают параллельные отрезки. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 99, а отрезки AB и CD параллельны ($AB \parallel CD$), а отрезки MN и CD не параллельны. Аналогично

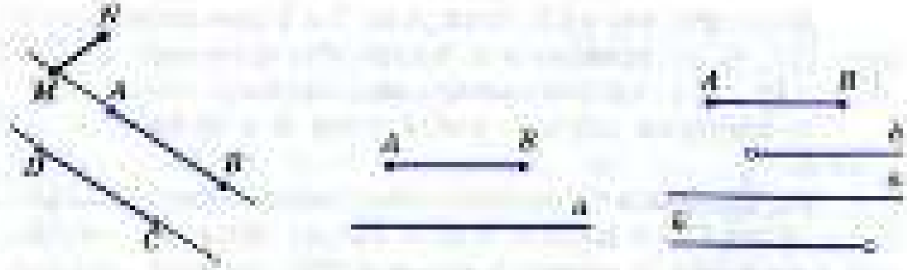


Рис. 99 а) б) в)

определяется параллельность отрезка и прямой (рис. 99, б), луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей (рис. 99, в).

25. Признаки параллельности двух прямых

Прямая c называется **секущей** по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках (рис. 100). При пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь углов, которые на рисунке 100 обозначены цифрами. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Рис. 100

Рассмотрим три признака параллельности двух прямых, связанные с этими парами углов.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 101, а).

Докажем, что $a \parallel b$. Если углы 1 и 2 прямые (рис. 101, б), то прямые a и b перпендикулярны к прямой AB и, следовательно, параллельны.

Рассмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые.

Из середины O отрезка AB проведём перпендикуляр OH к прямой a (рис. 101, в). На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1, равный отрезку AH, как показано на рисунке 101, в, и проведём отрезок OH_1. Треугольники OHA и OH_1B равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точка H_1 лежит на продолжении луча OH, т. е. точки H, O и H_1 лежат на одной прямой, а из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что угол 6 — прямой (так как угол 5 — прямой). Итак, прямые a и b перпендикулярны к прямой HH_1, поэтому они параллельны. **Теорема доказана.**

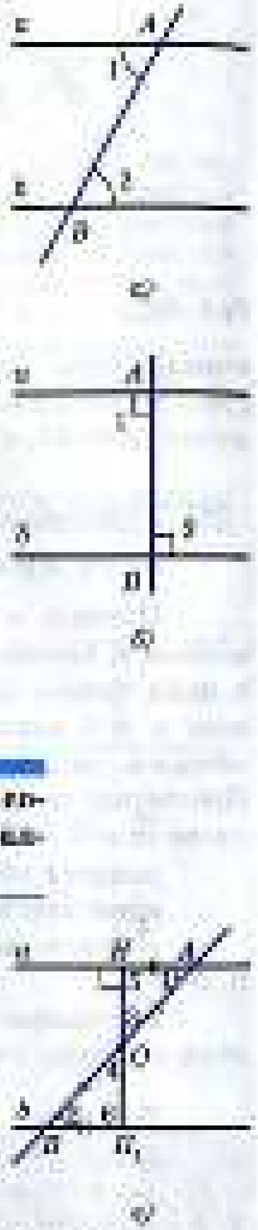


Рис. 101

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c соответственные углы равны, например $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 102).

Так как углы 2 и 3 — вертикальные, то $\angle 2 = \angle 3$. Из этих двух равенств следует, что $\angle 1 = \angle 3$. Но углы 1 и 3 — накрест лежащие, поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма односторонних углов равна 180°, например $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (см. рис. 102).

Так как углы 3 и 4 — смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Из этих двух равенств следует, что накрест лежащие углы 1 и 3 равны, поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

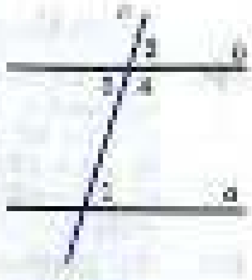


Рис. 102

26 Практические способы построения параллельных прямых

Признаки параллельности прямых лежат в основе способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов, используемых на практике. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертёжного угольника и линейки.

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, приложим чертёжный угольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 103. Затем, передвигая угольник вдоль линейки, добьёмся того, чтобы точка M оказалась на стороне угольника, и проведём прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенные на рисунке 103 буквами α и β, равны.

На рисунке 104 показан способ построения параллельных прямых при помощи рейсшины. Этим способом пользуются в чертёжной практике.

Аналогичный способ применяется при выполнении столярных работ, где для разметки параллельных прямых используется малка (две деревянные планки, скреплённые шарниром, рис. 105).

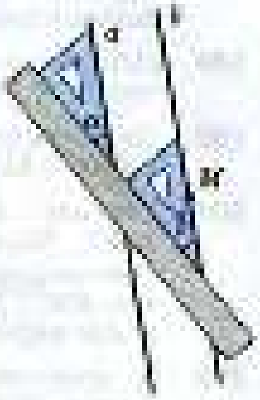


Рис. 103

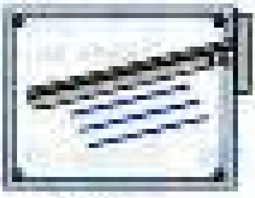


Рис. 104

Рис. 105

Задачи

186 На рисунке 106 прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что $a \parallel b$, если:
а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$;
б) $\angle 1 = \angle 6$;
в) $\angle 1 = 45°$, а угол 7 в три раза больше угла 3.

187 По данным рисунка 107 докажите, что $AB \parallel DE$.

188 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

189 Используя данные рисунка 108, докажите, что $BC \parallel AD$.

190 На рисунке 109 $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

191 Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Через точку K проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке M так, что $BM = MK$. Докажите, что прямые KM и AB параллельны.

192 В треугольнике ABC угол A равен $40°$, а угол BCE, смежный с углом ACB, равен $80°$. Докажите, что биссектриса угла BCE параллельна прямой AB.

193 ☐ В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

194 Начертите треугольник. Через каждую вершину этого треугольника с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямую, параллельную противоположной стороне.

195 Начертите треугольник ABC и отметьте точку D на стороне AC. Через точку D с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника.

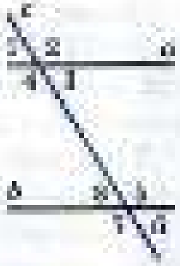


Рис. 106

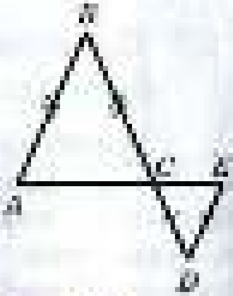


Рис. 107

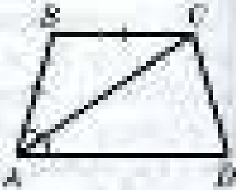


Рис. 108

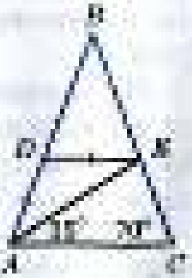


Рис. 109

27 Об аксиомах геометрии

Изучая свойства геометрических фигур, мы доказали ряд теорем. При этом мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. А на чём основаны доказательства самых первых теорем геометрии? Ответ на этот вопрос такой: некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и вообще строится вся геометрия. Такие исходные положения называются **аксиомами**.

Некоторые аксиомы были сформулированы ещё в первой главе (хотя они и не назывались там аксиомами). Например, аксиомой является утверждение о том, что

через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Многие другие аксиомы, хотя и не были выделены особо, но фактически использовались в наших рассуждениях. Так, сравнение двух отрезков мы проводили с помощью наложения одного отрезка на другой. Возможность такого наложения вытекает из следующей аксиомы:

на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Сравнение двух углов основано на аналогичной аксиоме:

от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Все эти аксиомы кажутся наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Само слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «ценный, достойный». Полный список аксиом планиметрии, принятых в нашем курсе геометрии, мы приводим в конце учебника.

Такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путём логических рассуждений доказываются другие утверждения, зародился ещё в глубокой древности и был изложен в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого учёного Евклида. Некоторые из аксиом Евклида (часть из них он называл постулатами) и сейчас используются в курсах геометрии, а сама геометрия, изложенная в «Началах», называется евклидовой геометрией. В следующем пункте мы познакомимся с одной из самых известных аксиом геометрии.

Евклид
(III в. до н. э.)

28 Аксиома параллельных прямых

Рассмотрим произвольную прямую a и точку M, не лежащую на ней (рис. 110, *а*). Докажем, что через точку M можно провести прямую, параллельную прямой a. Для этого проведём через точку M две прямые: сначала прямую c перпендикулярно к прямой a, а затем прямую b перпендикулярно к прямой c (рис. 110, *б*). Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой c, то они параллельны.

Итак, через точку M проходит прямая b, параллельная прямой a. Возникает следующий вопрос: можно ли через точку M провести ещё одну прямую, параллельную прямой a?

Нам представляется, что если прямую b «повернуть» даже на очень малый угол вокруг точки M, то она пересечёт прямую a (прямая b' на рисунке 110, *б*). Иными словами, нам кажется, что через точку M нельзя провести другую прямую (отличную от b), параллельную прямой a. А можно ли это утверждение доказать?

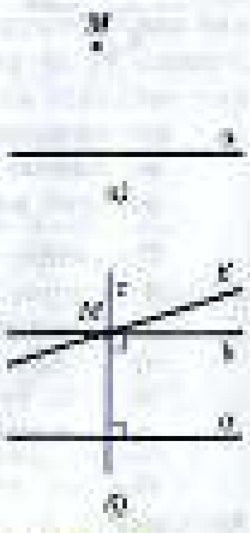


Рис. 110

Этот вопрос имеет большую историю. В «Началах» Евклида содержится постулат (пятый постулат Евклида), из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Многие математики, начиная с древних времён, предпринимали попытки доказать пятый постулат Евклида, т. е. вывести его из других аксиом. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными. И лишь в прошлом веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой.

Н. И. Лобачевский (1792—1856)

Огромную роль в решении этого непростого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Итак, в качестве ещё одного из исходных положений мы принимаем аксиому параллельных прямых.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Утверждения, которые выводятся непосредственно из аксиом или теорем, называются **следствиями**. Например, утверждения 1 и 2 (см. с. 35) являются следствиями из теоремы о биссектрисе равнобедренного треугольника.

Рассмотрим некоторые следствия из аксиомы параллельных прямых.

1°. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

а)

б)

Рис. 111

Параллельные прямые

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке M (рис. 111, а). Докажем, что прямая c пересекает и прямую b. Если бы прямая c не пересекала прямую b, то через точку M проходили бы две прямые (прямые a и c), параллельные прямой b (рис. 111, б). Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, и, значит, прямая c пересекает прямую b.

2°. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 112, а). Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке M (рис. 112, б). Тогда через точку M проходят две прямые (прямые a и b), параллельные прямой c.

Рис. 112

Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Поэтому наше предположение неверно, а значит, прямые a и b параллельны.

29 Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

Во всякой теореме различают две части: **условие** и **заключение**. Условие теоремы — это то, что дано, а заключение — то, что требуется доказать.

Рассмотрим, например, теорему, выражающую признак параллельности двух прямых: если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. В этой теореме условием является первая часть утверждения: «при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны» (это дано), а заключением — вторая часть: «прямые параллельны» (это требуется доказать).

Теоремой, обратной данной, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Докажем теоремы, обратные трём теоремам п. 25.

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей MN. Докажем, что накрест лежащие углы, например 1 и 2, равны (рис. 113).

Допустим, что углы 1 и 2 не равны. Отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2, так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. По построению эти накрест лежащие углы равны, поэтому $MP \parallel b$. Мы получили, что через точку M проходят две прямые (прямые a и MP), параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

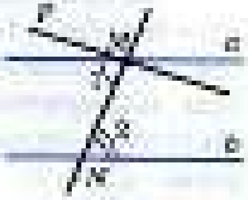


Рис. 113

Замечание

При доказательстве этой теоремы мы использовали способ рассуждений, который называется методом доказательства от противного.

Мы предположили, что при пересечении параллельных прямых a и b секущей MN накрест лежащие углы 1 и 2 не равны, т. е. предположили противоположное тому, что нужно доказать. Исходя из этого предположения, путём рассуждений мы пришли к противоречию с аксиомой параллельных прямых. Это означает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Такой способ рассуждений часто используется в математике. Мы им пользовались и ранее, например в п. 12 при доказательстве того, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются. Этим же методом мы пользовались в п. 28 при доказательстве следствий 1° и 2° из аксиомы параллельных прямых.

Следствие

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Действительно, пусть $a \parallel b$, $c \perp a$, т. е. $\angle 1 = 90°$ (рис. 114). Прямая c пересекает прямую a, поэтому она пересекает также прямую b. При пересечении параллельных прямых a и b секущей c образуются равные накрест лежащие углы: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = 90°$, то и $\angle 2 = 90°$, т. е. $c \perp b$, что и требовалось доказать.

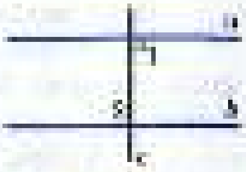


Рис. 114

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажем, что соответственные углы, например 1 и 2, равны (см. рис. 102). Так как $a \parallel b$, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Из равенств $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c (см. рис. 102). Докажем, например, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Так как $a \parallel b$, то соответственные углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 4 смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ следует, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Теорема доказана.

Замечание

Если доказана некоторая теорема, то отсюда ещё не следует справедливость обратного утверждения. Более того, обратное утверждение не всегда верно. Приведём простой пример. Мы знаем, что если углы вертикальные, то они равны. Обратное утверждение: «если углы равны, то они вертикальные», конечно же, неверно.

30 Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

Докажем теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы и $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый, то и угол $A_1O_1B_1$ — развёрнутый (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть $\angle AOB$ — неразвёрнутый угол. Возможные случаи расположения углов AOB и $A_1O_1B_1$ изображены на рисунке 116, а и б. Прямая O_1B_1 пересекает прямую O_1A_1 и, следовательно, пересекает параллельную ей прямую OA в некоторой точке M. Параллельные прямые OB и O_1B_1 пересечены секущей OM, поэтому один из углов, образованных при пересечении прямых O_1B_1 и OA (угол 1 на рисунке 116), равен углу AOB (как накрест лежащие углы). Параллельные прямые OA и O_1A_1 пересечены секущей O_1M, поэтому либо $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 116, а), либо $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 116, б). Из равенства $\angle 1 = \angle AOB$ и последних двух равенств следует, что либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (см. рис. 116, а), либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (см. рис. 116, б). Теорема доказана.

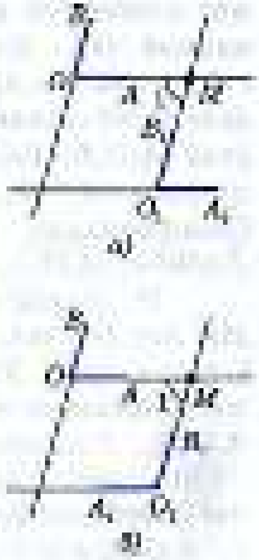


Рис. 116

Параллельные прямые

Докажем теперь теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы, $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый или прямой, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый или прямой (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть $\angle AOB < 180°$, $O \notin O_1A_1$, $O \notin O_1B_1$ (случаи $O \in O_1A_1$, $O \in O_1B_1$ рассмотрите самостоятельно).

Возможны два случая (рис. 116).

1°. $\angle AOB < 90°$ (см. рис. 116, *а*). Проведём луч OC так, чтобы прямые OA и OC были взаимно перпендикулярными, а точки B и C лежали по разные стороны от прямой OA. Далее, проведём луч OD так, чтобы прямые OB и OD были взаимно перпендикулярными, а точки C и D лежали по одну сторону от прямой OA. Поскольку $\angle AOB = 90° - \angle AOD$ и $\angle COD = 90° - \angle AOD$, то $\angle AOB = \angle COD$. Стороны угла COD соответственно параллельны сторонам угла $A_1O_1B_1$ (объясните почему), поэтому либо $\angle COD = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle COD + \angle A_1O_1B_1 = 180°$. Следовательно, либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

2°. $\angle AOB > 90°$ (см. рис. 116, *б*). Проведём луч OC так, чтобы угол AOC был смежным с углом AOB. Угол AOC острый, и его стороны соответственно перпендикулярны сторонам угла $A_1O_1B_1$. Следовательно, либо $\angle AOC + \angle A_1O_1B_1 = 180°$, либо $\angle AOC = \angle A_1O_1B_1$. В первом случае $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, во втором случае $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$. Теорема доказана.

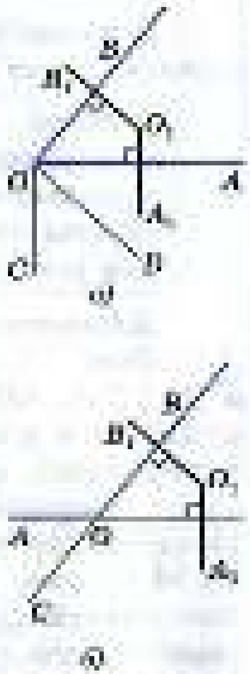


Рис. 116

Задачи

196 Дан треугольник ABC. Сколько прямых, параллельных стороне AB, можно провести через вершину C?

197 Через точку, не лежащую на прямой p, проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекают прямую p? Рассмотрите все возможные случаи.

198 Прямые a и b перпендикулярны к прямой p, прямая c пересекает прямую a. Пересекает ли прямая c прямую b?

199 Прямая p параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую p.

200 На рисунке 117 $AD \parallel p$ и $PQ \parallel BC$. Докажите, что прямая p пересекает прямые AB, AE, AC, BC и PQ.

201 Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна $210°$. Найдите эти углы.

202 На рисунке 118 прямые a, b и c пересечены прямой d, $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

203 Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если:
а) один из углов равен $150°$;
б) один из углов на $70°$ больше другого.

204 Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

205 По данным рисунка 119 найдите $\angle 1$.

206 $\angle ABC = 70°$, а $\angle BCD = 110°$. Могут ли прямые AB и CD быть:
а) параллельными;
б) пересекающимися?

207 Ответьте на вопросы задачи 206, если $\angle ABC = 65°$, а $\angle BCD = 105°$.

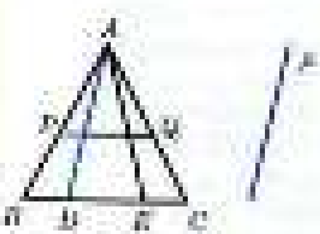


Рис. 117

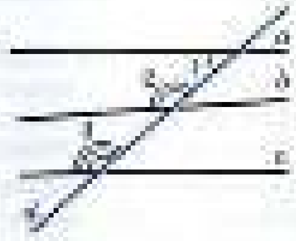


Рис. 118

Рис. 119

208 Разность двух односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 50°. Найдите эти углы.

209 На рисунке 120 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45°$. Найдите углы 1, 2 и 3.

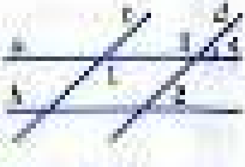


Рис. 120

210 Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через блоки A и B (рис. 121). Третье тело P_3 подвешено к той же нити в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2. (При этом $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.) Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

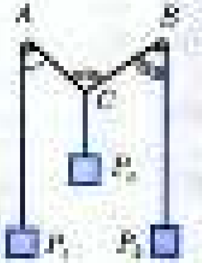


Рис. 121

211 Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны; б) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

212 Прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC, пересекаются в точке H, угол B — тупой, $\angle C = 20°$. Найдите угол AHB.

Вопросы для повторения к главе III

1. Дайте определение параллельных прямых. Какие два отрезка называются параллельными?
2. Что такое секущая по отношению к двум прямым? Назовите пары углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.
3. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
4. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
5. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.
6. Расскажите о практических способах проведения параллельных прямых.
7. Объясните, какие утверждения называются аксиомами. Приведите примеры аксиом.
8. Докажите, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.
9. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.
10. Какое утверждение называется следствием? Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

11 Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

12 Какая теорема называется обратной данной теореме? Приведите примеры теорем, обратных данным.

13 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.

14 Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

15 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей:
а) соответственные углы равны;
б) сумма односторонних углов равна 180°.

16 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

17 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Дополнительные задачи

213 ❑ На рисунке 122 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

Рис. 122

214 ❑ Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

215 ❑ По данным рисунка 123 найдите угол 1.

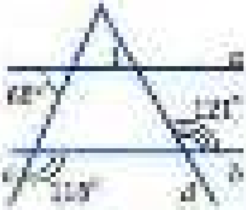


Рис. 123

216 ❑ На рисунке 124 DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

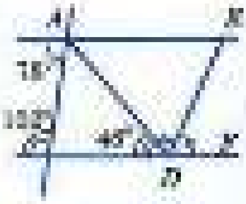


Рис. 124

217 ❑ Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

218 Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

219* ❑ Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

220 □ Докажите, что если при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые a и b пересекаются.

221 □ Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN — с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

222 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки через точку A проведите прямую, параллельную прямой a.

Глава IV

Соотношения между сторонами и углами треугольника

В этой главе мы снова обращаемся к треугольникам и будем обсуждать различные их свойства, при этом большое внимание уделим прямоугольным треугольникам, т. е. таким треугольникам, у которых один угол прямой. Некоторые свойства прямоугольных треугольников находят практическое применение, например, в конструкциях угловых отражателей, которые широко используются в различных устройствах — от велосипедов до космических аппаратов. Об этом также будет рассказано в данной главе.

§1 Сумма углов треугольника

31 Теорема о сумме углов треугольника

Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему о сумме углов треугольника.

Теорема

Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство

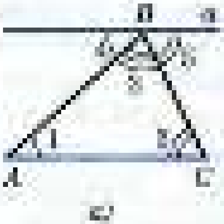
Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

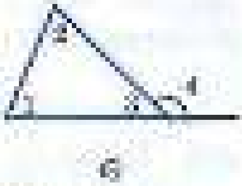
Проведём через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 126, *а*). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

$$\angle 4 = \angle 1, \ \angle 5 = \angle 3. \qquad (1)$$

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развёрнутому углу с вершиной B, т. е.



а)



б)

Рис. 126

$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, или $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Теорема доказана.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. Докажем, что **внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.**

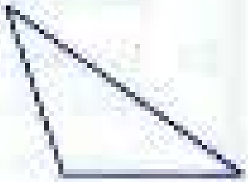
Обратимся к рисунку 125, б, на котором угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника. Так как $\angle 4 + \angle 3 = 180^\circ$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180^\circ$, то $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

Остроугольный треугольник

а)

32 Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники

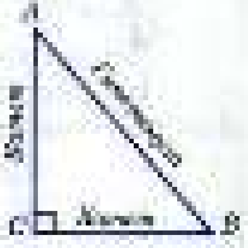
Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других углов не превосходит 90°, и поэтому каждый из них острый. Таким образом, **в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.**



Тупоугольный треугольник

б)

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным** (рис. 126, а). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется **тупоугольным** (рис. 126, б). Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется **прямоугольным**. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны — **катетами**. На рисунке 126, в изображён прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.



Прямоугольный треугольник

в)

Рис. 126

Задачи

223 Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 57^\circ$; б) $\angle A = 24^\circ$, $\angle B = 130^\circ$; в) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$; г) $\angle A = 60^\circ + \alpha$, $\angle B = 60^\circ - \alpha$.

224 Найдите углы треугольника ABC, если $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$.

225 Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен $60°$.

226 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

227 Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

228 Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) $40°$; б) $60°$; в) $100°$.

229 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

230 Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

231 Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

232 Верно ли утверждение: если треугольник равнобедренный, то один из его внешних углов в два раза больше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом?

233 Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

234 Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен $115°$. Найдите углы треугольника.

235 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

§2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

33 Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Теорема

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство

1) Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис. 127, а). Докажем, что $\angle C > \angle B$.

Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 127, б). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол 1 является частью угла C, и, значит, $\angle C > \angle 1$. Угол 2 — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$. Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB > AC$.

Предположим, что это не так. Тогда либо $AB = AC$, либо $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный, и, значит, $\angle C = \angle B$. Во втором случае $\angle B > \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол). И то и другое противоречит условию: $\angle C > \angle B$. Поэтому наше предположение неверно, и, следовательно, $AB > AC$. Теорема доказана.

Рис. 127

Следствие 1

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Следствие 2

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).

Докажем этот признак. Пусть в треугольнике два угла равны. Тогда равны и стороны, лежащие против этих углов. Действительно, если предположить, что одна из указанных сторон больше другой, то угол, лежащий против неё, будет больше угла, лежащего против другой стороны, а это противоречит условию (тому, что данные углы равны).

Итак, в треугольнике две стороны равны, т. е. треугольник — равнобедренный.

34 Неравенство треугольника

Теорема

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство

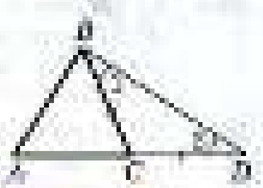


Рис. 128

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AB < AC + CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 128). В равнобедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$, а в треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 1$ и, значит, $\angle ABD > \angle 2$.

Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$, поэтому $AB < AC + CB$. Теорема доказана.

Следствие

Для любых трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$.

Каждое из этих неравенств называется неравенством треугольника.

Задачи

236 Сравните углы треугольника ABC и выясните, может ли быть угол A тупым, если: а) $AB > BC > AC$; б) $AB = AC < BC$.

237 Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

238 □ Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

239 □ Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.

240 □ В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

241 □ Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

242 □ Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.

243 □ Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная его биссектрисе AA_1 и пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

244 □ Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE — равнобедренный.

245 □ Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

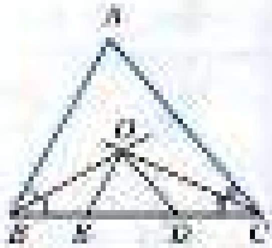


Рис. 129

246 □ На рисунке 129 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр $\triangle EDO$ равен длине отрезка BC.

247 □ На рисунке 130 $AB = AC$, $AP = AQ$. Докажите, что:
а) треугольник BOC — равнобедренный;
б) прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.

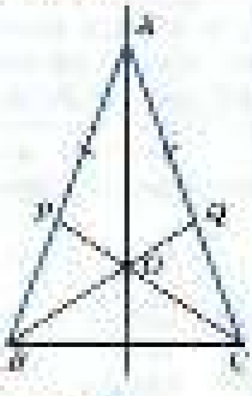


Рис. 130

248 Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м и 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм?

249 В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

250 □ Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 7 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

251 Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Решение

Докажем, например, что в треугольнике ABC $AB > AC - BC$. Так как $AB + BC > AC$, то $AB > AC - BC$.

252 Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

253 Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов — острый. Найдите стороны треугольника.

§3 Прямоугольные треугольники

35 Некоторые свойства прямоугольных треугольников

Рассмотрим свойства прямоугольных треугольников, которые устанавливаются с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

1°. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

В самом деле, сумма углов треугольника равна 180°, а прямой угол равен 90°, поэтому сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2°. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол A — прямой, $\angle B = 30°$ и, значит, $\angle C = 60°$ (рис. 131, *а*). Докажем, что $AC = \frac{1}{2}BC$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 131, *б*. Получим треугольник BCD, в котором $\angle B = \angle D = 60°$, поэтому $DC = BC$. Но

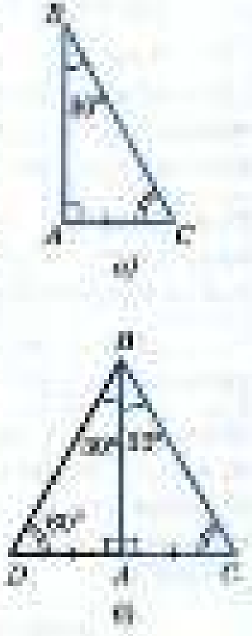


Рис. 131

$AC = \frac{1}{2}DC$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2}BC$, что и требовалось доказать.

3°. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого катет AC равен половине гипотенузы BC (рис. 132, а). Докажем, что $\angle ABC = 30°$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 132, б. Получим равносторонний треугольник BCD. Углы равностороннего треугольника равны друг другу (объясните почему), поэтому каждый из них равен 60°. В частности, $\angle DBC = 60°$. Но $\angle DBC = 2\angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC = 30°$, что и требовалось доказать.

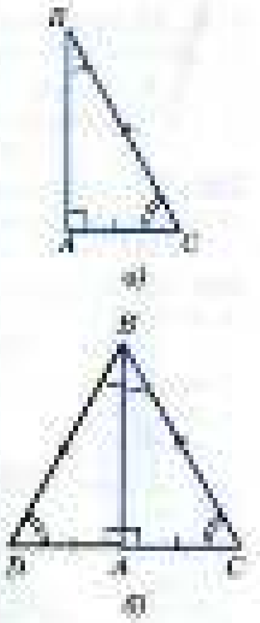


Рис. 132

36 Признаки равенства прямоугольных треугольников

Так как в прямоугольном треугольнике угол между двумя катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников следует:

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Далее, из второго признака равенства треугольников следует:

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Рассмотрим ещё два признака равенства прямоугольных треугольников.

Теорема

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Из свойства 1° п. 35 следует, что в таких треугольниках два других острых угла также равны, поэтому треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, т. е. по стороне (гипотенузе) и двум прилежащим к ней углам. **Теорема доказана.**

Теорема

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 — прямые, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 139, *а*, *б*). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle C = \angle C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина C совместится с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C_1A_1 и C_1B_1. Поскольку $CB = C_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1. Но тогда вершины A и A_1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка A совместится с некоторой другой точкой A_2 луча C_1A_1, то получим равнобедренный треугольник $A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны (на рисунке 139, *б* $\angle A_2$ — острый, а $\angle A_1$ — тупой как смежный с острым углом $B_1A_1C_1$). Но это невозможно, поэтому вершины A и A_1 совместятся.

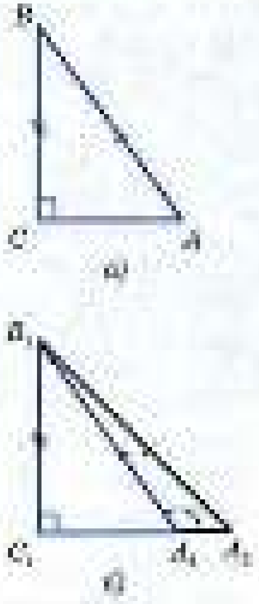


Рис. 139

Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. они равны. **Теорема доказана.**

37* Уголковый отражатель

Мы знаем, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Это свойство лежит в основе конструкции простейшего уголкового отражателя. Прежде чем описать его устройство, рассмотрим следующую задачу.

Задача

Угол между зеркалами OA и OB равен 90°. Луч света, падающий на зеркало OA под углом α, отражается от него, а затем отражается от зеркала OB (рис. 134). Доказать, что падающий и отражённый лучи параллельны.

Рис. 134

Решение

По закону отражения света падающий луч SM и луч MN составляют с прямой OA равные углы α. Так как треугольник MON прямоугольный, то угол MNO равен $90° - \alpha$. Применяя опять закон отражения света, получаем, что луч MN и отражённый луч NT составляют с прямой OB равные углы. Обращаясь к рисунку 134, мы видим, что $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$, поэтому $\angle SMN + \angle MNT = 180°$.

Следовательно, падающий луч SM и отражённый луч NT параллельны, что и требовалось доказать.

Рис. 135

Простейший уголковый отражатель представляет собой несколько зеркал, поставленных так, что соседние зеркала образуют угол в 90°. На рисунке 135 в виде ломаной линии схематически изображён такой отражатель. Представим

* Здесь и в дальнейшем пункты, отмеченные звёздочкой, не являются обязательными.

ложим, что на этот отражатель падает пучок параллельных лучей (на рисунке эти лучи изображены чёрными линиями со стрелками). Тогда отражённые лучи будут параллельны падающим лучам (эти лучи изображены цветными линиями со стрелками). Таким образом, уголковый отражатель «возвращает назад» падающий на него пучок параллельных лучей при любом расположении отражателя по отношению к падающему пучку лучей.

Это свойство уголкового отражателя используется в технике. Так, уголковый отражатель устанавливается на заднем крыле велосипеда для того, чтобы «возвращать назад» свет автомобильных фар. Это даёт возможность водителю автомобиля видеть ночью идущий впереди велосипед. Отметим, что уголковый отражатель, используемый на практике, устроен более сложно, чем описанный простейший, но принцип его действия тот же, что и у простейшего уголкового отражателя.

Уголковый отражатель был установлен на одной из отечественных автоматических станций, запущенных на Луну. С поверхности Земли участок Луны, на котором находилась автоматическая станция с уголковым отражателем, был освещён лучом лазера. Луч «вернулся» в то же место, где находился лазер. Измерив точное время от момента включения лазера до момента возвращения сигнала, удалось с весьма высокой точностью найти расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны.

Задачи

254 Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

255 В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE проведена высота CF. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D = 54^\circ$.

256 Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 26,4 см. Найдите гипотенузу треугольника.

257 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине A равен 120°, $AC + AB = 18$ см. Найдите AC и AB.

258 Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведён перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB = 12$ см.

259 Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведённая к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника.

260 Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 7,6 см, а боковая сторона треугольника равна 15,2 см. Найдите углы этого треугольника.

261 Докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведённые из вершин основания, равны.

262 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 — прямые, BD и B_1D_1 — биссектрисы. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$.

263 Высоты, проведённые к боковым сторонам AB и AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника, если $\angle BMC = 140°$.

264 Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 55°$, $\angle B = 67°$.

265 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AF и высота AH. Найдите углы треугольника AHF, если $\angle B = 112°$.

266 На сторонах угла O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C. Докажите, что луч OC — биссектриса угла O.

267 Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведённые из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведённым из концов этой стороны, другого треугольника.

268 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

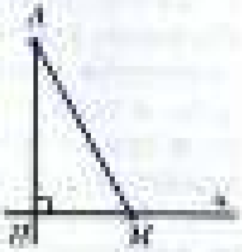
269 Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$.

270 Внутри угла дана точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

§4 Построение треугольника по трём элементам

38 Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между двумя точками мы назвали длину отрезка, соединяющего эти точки. Введём теперь понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.



Отрезок AM — наклонная к прямой a

Рис. 136

Пусть отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой a, M — любая точка прямой a, отличная от H (рис. 136). Отрезок AM называется **наклонной**, проведённой из точки A к прямой a. В прямоугольном треугольнике AHM катет AH меньше гипотенузы AM.

Следовательно, **перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.**

Длина перпендикуляра, проведённого из точки к прямой, называется расстоянием от этой точки до прямой.

Отметим, что расстояние от точки до прямой равно наименьшему из расстояний от этой точки до точек прямой.

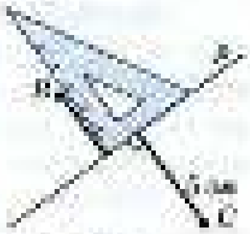


Рис. 137

На рисунке 137 расстояние от точки B до прямой p равно 3 см, а расстояние от точки C до этой прямой равно 5 см.

Прежде чем ввести понятие расстояния между параллельными прямыми, рассмотрим одно из важнейших свойств параллельных прямых.

Теорема

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Доказательство

Рассмотрим параллельные прямые a и b. Отметим на прямой a точку A и проведём из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 139). Докажем, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB.

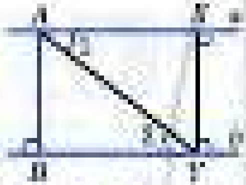
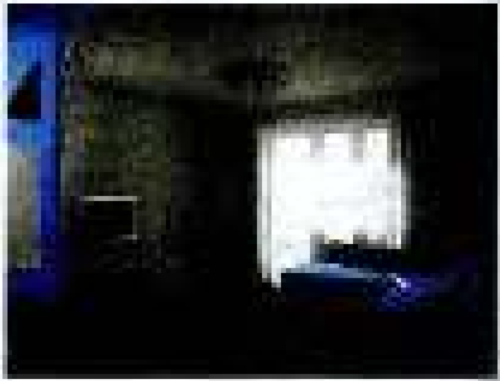


Рис. 139

Проведём из точки X перпендикуляр XY к прямой b. Так как $XY \perp b$, то $XY \perp a$. Прямоугольные треугольники ABY и YXA равны по гипотенузе и острому углу (AY — общая гипотенуза, а углы 1 и 2 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых a и b секущей AY). Следовательно, $XY = AB$.

Итак, любая точка X прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Очевидно, все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a. Теорема доказана.



Из доказанной теоремы следует, что точки, движущиеся по одной из параллельных прямых, всё время находятся на одном и том же расстоянии от другой прямой.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

Отметим, что расстояние между параллельными прямыми равно наименьшему из расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой.

Замечание 1

Справедливо утверждение, обратное доказанной теореме: **все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.** (Докажите это самостоятельно.)

Замечание 2

Из доказанной теоремы и ей обратной следует, что множество всех точек плоскости, на-

находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

В самом деле, пусть a — данная прямая, d — данное расстояние. Отметим на прямой a произвольную точку A и проведём отрезок AB длины d, перпендикулярный к прямой a; через точку B проведём прямую b, параллельную прямой a (сделайте соответствующий рисунок). По доказанной теореме все точки прямой b находятся на расстоянии d от прямой a, т. е. все они принадлежат искомому множеству. В силу обратной теоремы любая точка искомого множества лежит на прямой b. Таким образом, искомым множеством является прямая b.

Множество всех точек, удовлетворяющих какому-либо условию, иногда называют **геометрическим местом точек**, удовлетворяющих этому условию. Можно сказать тем самым, что геометрическое место точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

На этом факте основано устройство инструмента, называемого **рейсмусом** (рис. 139, *а*). Рейсмус используется в столярном деле для разметки на поверхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска металлическая игла прочерчивает отрезок прямой, параллельный краю бруска (рис. 139, *б*).


а   *б*

Рис. 139

39 Построение треугольника по трём элементам

Задача 1

Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Решение

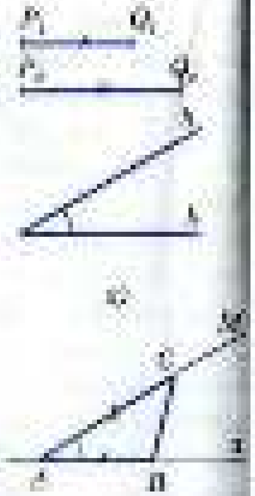
Прежде всего уточним, как нужно понимать эту задачу, т. е. что здесь дано и что нужно построить.

Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk (рис. 140, а). Требуется с помощью циркуля и линейки (без масштабных делений) построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A между этими сторонами равен данному углу hk.

Проведём прямую a и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 140, б). Затем построим угол BAM, равный данному углу hk (как это сделать, мы знаем). На луче AM отложим отрезок AC, равный отрезку P_2Q_2, и проведём отрезок BC. Построенный треугольник ABC — искомый.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и данном неразвёрнутом угле hk искомый треугольник построить можно. Так как прямую a и точку A на ней можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условиям задачи. Все эти треугольники равны друг другу (по первому признаку равенства треугольников), поэтому принято говорить, что данная задача имеет единственное решение.



а

б

Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Рис. 140

Задача 2

Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Решите эту задачу самостоятельно.

Задача 3

Построить треугольник по трём его сторонам.

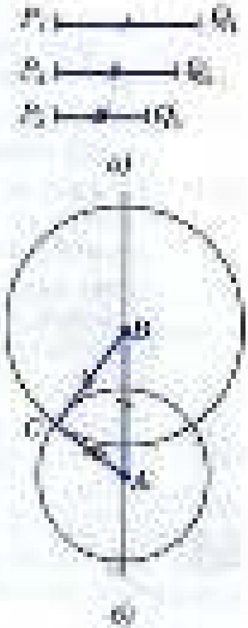
Решение

Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 141, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$.

Проведём прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 141, *б*). Затем построим две окружности: одну — с центром A и радиусом P_3Q_3, а другую — с центром B и радиусом P_2Q_2. Пусть точка C — одна из точек пересечения этих окружностей. Проведя отрезки AC и BC, получим искомый треугольник ABC.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

Задача 3 не всегда имеет решение. Действительно, во всяком треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны, поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равнялись бы данным отрезкам.



Построение треугольника по трём сторонам

Рис. 141

Задачи

271 Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна 17 см, а разность длин равна 1 см. Найдите расстояние от точки до прямой.

272 В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AC равно 6 см. Найдите расстояние от вершины A до прямой BC.

273 Сумма гипотенузы CE и катета CD прямоугольного треугольника CDE равна 31 см, а их разность равна 3 см. Найдите расстояние от вершины C до прямой DE.

274 Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон.

275 На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка M, равноудалённая от боковых сторон. Докажите, что CM — высота треугольника ABC.

276 Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

277 Расстояние между параллельными прямыми a и b равно 3 см, а между параллельными прямыми a и c равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми b и c.

278 ☐ Прямая AB параллельна прямой CD. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 30°$, $AD = 6$ см.

279* Докажите, что все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.

280 Дан неразвёрнутый угол ABC и отрезок PQ. Что представляет собой множество всех точек, лежащих внутри данного угла и удалённых от прямой BC на расстояние PQ?

281 Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых?

282 Прямые a и b параллельны. Докажите, что середины всех отрезков XY, где $X \in a$, $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым a и b и равноудалённой от этих прямых.

283 Что представляет собой множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

Задачи на построение

284 ☐ Даны прямая a и отрезок AB. Постройте прямую p, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB.

Решение

Отметим на прямой a какую-нибудь точку C и проведём через точку C прямую b, перпендикулярную к прямой a (рис. 142). Затем на одном из лучей прямой b, исходящих из точки C, отложим отрезок CD, равный отрезку AB. Через точку D проведём прямую p, перпендикулярную к прямой b. Прямая p — искомая (объясните почему).

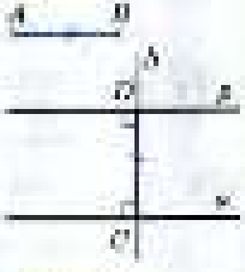


Рис. 142

Как видно из построения, для любой данной прямой a и любого данного отрезка AB искомую прямую можно построить, причём задача имеет два решения (прямые p и p_1 на рисунке 143).

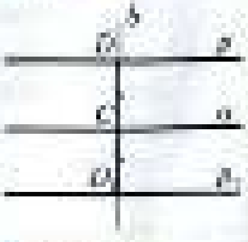


Рис. 143

285 ☐ Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, удалённую от прямой b на расстояние PQ.

286 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.

287 Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.

288 Даны отрезок PQ и угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle hk$;

б) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle hk$.

289 Даны два угла hk и h_1k_1 и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = PQ$, $\angle A = \angle hk$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle h_1k_1$.

290 Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу.

291 Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании; в) по боковой стороне и углу при основании; г) по основанию и боковой стороне; д) по основанию и медиане, проведённой к основанию.

292 Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = 2P_3Q_3$;

б) $AB = 2P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = \frac{1}{2}P_3Q_3$.

Всегда ли задача имеет решение?

293 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведённой к этой стороне.

Решение

Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk (рис. 144, а). Требуется построить треугольник ABC, у которого одна из сторон, скажем AB, равна отрезку P_1Q_1, один из прилежащих к ней углов, например угол A, равен данному углу hk, а высота CH, проведённая к стороне AB, равна данному отрезку P_2Q_2.

Построим угол XAY, равный данному углу hk, и отложим на луче AX отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 144, б).

Рис. 144 а) б)

Для построения вершины C искомого треугольника заметим, что расстояние от точки C до прямой AB должно равняться P_2Q_2. Множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB и лежащих по ту же сторону от прямой AB, что и точка Y, является прямой p, параллельной прямой AB и находящейся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB. Следовательно, искомая точка C есть точка пересечения прямой p и луча AY. Построение прямой p описано в решении задачи 284. Очевидно, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи: $AB = P_1Q_1$, $CH = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

204 □ Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон.

205 Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из этих сторон.

Вопросы для повторения к главе IV

1 Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.

2 Какой угол называется внешним углом треугольника? Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

3 Докажите, что в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.

4 Какой треугольник называется остроугольным? Какой треугольник называется тупоугольным?

5 Какой треугольник называется прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника?

6 Докажите, что в треугольнике:

1) против большей стороны лежит больший угол;

2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.

7 Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

8 Докажите, что если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

9 Докажите, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Что такое неравенство треугольника?

10 Докажите, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.

11 Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

12 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

13 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

14 Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой.

15 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из этой же точки к этой прямой.

16 Что называется расстоянием от точки до прямой?

17 Докажите, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

18 Что называется расстоянием между двумя параллельными прямыми?

19 Докажите, что множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

20 Что такое геометрическое место точек? Приведите пример.

21 Объясните, как построить треугольник:
а) по двум сторонам и углу между ними;
б) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

22 Объясните, как построить треугольник по трём сторонам. Всегда ли эта задача имеет решение?

Дополнительные задачи

296 В равнобедренном треугольнике ABC биссектрисы равных углов B и C пересекаются в точке O. Докажите, что угол BOC равен внешнему углу треугольника при вершине B.

297 На стороне AD треугольника ADC отмечена точка B так, что $BC = BD$. Докажите, что прямая DC параллельна биссектрисе угла ABC.

298 На рисунке 145 $AD \parallel BE$, $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол DCE — прямой.

299 На рисунке 146 $AB = AC$, $AP = PQ = QR = RB = BC$. Найдите угол A.

300 Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведённой из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведённых из вершин острых углов, — на продолжениях сторон.

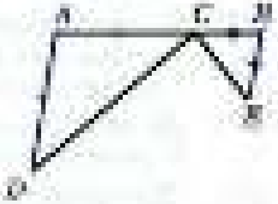


Рис. 145

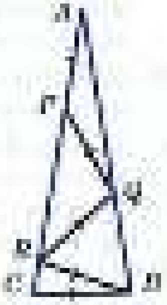


Рис. 146

301 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$;
б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.

302 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $AM_1 = AM_2$, то $HM_1 = HM_2$;
б) если $AM_1 < AM_2$, то $HM_1 < HM_2$.

303* Докажите, что в треугольнике ABC медиана AM меньше полусуммы сторон AB и AC.

304* Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB + MC < AB + AC$.

305 Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

306 Докажите, что если $AB = AC + CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

307 В прямоугольном треугольнике проведена высота из вершины прямого угла. Докажите, что данный треугольник и два образовавшихся треугольника имеют соответственно равные углы.

308 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным 37 см, внешний угол при вершине B равен $60°$. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

309 В треугольнике с неравными сторонами AB и AC проведены высота AH и биссектриса AD. Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C.

310 Докажите, что в равных треугольниках высоты, проведённые к равным сторонам, равны.

311 Что представляет собой множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных пересекающихся прямых?

312 Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

313* □ Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

314 Постройте прямоугольный треугольник по:
а) гипотенузе и острому углу;
б) катету и противолежащему углу;
в) гипотенузе и катету.

315 С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) $30°$; б) $60°$; в) $15°$; г) $120°$; д) $150°$; е) $135°$; ж) $165°$; з) $75°$; и) $105°$.

116* Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к ней, и медиане, проведённой к одной из двух других сторон.

117 Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE = AD + CE$.

118 Дан равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC. На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

119* Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла.

120* Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведённым к этой стороне.

121* Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку M, находящуюся на расстоянии AM от прямой BC.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе I

322 Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

323 Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

324 Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и kl. Докажите, что

$$\angle hk = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle kl - \angle hk),$$

$$\angle kl = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle kl - \angle hk).$$

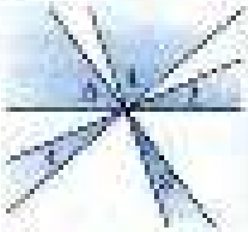


Рис. 147

325 Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 147). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

326 Даны шесть попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух прямых проходит по крайней мере ещё одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

327 Даны шесть точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит по крайней мере ещё одну из данных точек. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой.

Задачи к главе II

328 Точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от прямой AB и расположены так, что $AC_1 = BC_2$ и $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Докажите, что прямая C_1C_2 проходит через середину отрезка AB.

329 Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

330 Сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого. Могут ли эти треугольники быть неравными?

331 Две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

332 Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $OC = OD$, если $AC = AD = BC = BD$.

Задачи к главам III и IV

333 Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если угол A равен α.

334 Через каждую вершину данного треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе треугольника, исходящей из этой вершины. Отрезки этих прямых вместе со сторонами данного треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

335 В каждом из следующих случаев определите вид треугольника:
а) сумма любых двух углов больше $90°$;
б) каждый угол меньше суммы двух других углов.

336 Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведённая из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противолежащей стороны.

337 Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята такая точка M, что $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Найдите угол AMC, если $\angle BAC = 80°$.

338 Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

339 Отрезок BB_1 — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BA > B_1A$ и $BC > B_1C$.

340 Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $AD = AB$. Докажите, что $AC > AB$.

341 В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, отрезок AD — биссектриса. Докажите, что $\angle ADB > \angle ADC$ и $BD > CD$.

342 Докажите теорему: если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

343 Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведённая из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

344 В треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, отрезок AM соединяет вершину A с произвольной точкой M стороны BC. Докажите, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

345 Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, а из вершины B проведён перпендикуляр BH к этой прямой. Докажите, что

периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

346 В треугольнике ABC, где $AB < AC$, отрезок AD — биссектриса, отрезок AH — высота. Докажите, что точка H лежит на луче DB.

347 Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведённых из этой же вершины.

348 Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины, пополам.

349 Медиана и высота треугольника, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.

350 В треугольнике ABC высота AA_1 не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный.

Задачи на построение

Рассмотрим схему, по которой обычно решают задачи на построение циркулем и линейкой. Она состоит из четырёх частей:

1) Отыскание способа решения задачи путём установления связей между искомыми элементами и данными задачи. Эта часть называется анализом задачи. Анализ даёт возможность составить план решения задачи на построение.

2) Выполнение построения по намеченному плану.

3) Доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

4) Исследование задачи, т. е. выяснение вопроса о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений. В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например анализ или исследование, опускаются. Так мы поступали при решении простейших задач на построение. Рассмотрим теперь более сложные задачи.

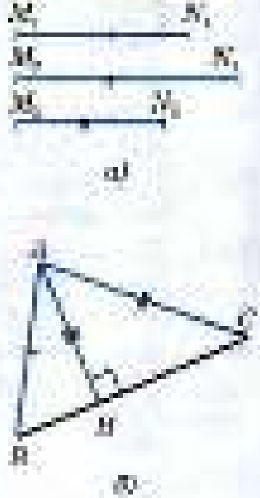


Рис. 148

351 Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

Решение

Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 148, а). Требуется построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны соответственно данным отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а высота AH равна отрезку M_3N_3. Проведём решение задачи по описанной схеме.

Анализ

Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 148, б). Мы видим, что сторона AB и высота AH являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника ABH. Поэтому построение треугольника ABC можно провести по такому плану: сначала построить прямоугольный треугольник ABH, а затем достроить его до всего треугольника ABC.

Построение

Строим прямоугольный треугольник ABH, у которого гипотенуза AB равна отрезку M_1N_1, а катет AH равен данному отрезку M_3N_3. Как это сделать, мы знаем (задача 314, а). На рисунке 149, а изображён построенный треугольник ABH. Затем проводим окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке A. Одну из точек пересечения этой окружности с прямой BH обозначим буквой C. Проведя отрезки BC и AC, получим искомый треугольник ABC (рис. 149, б).

Доказательство

Треугольник ABC действительно искомый, так как по построению сторона AB равна M_1N_1, сторона AC равна M_2N_2, а высота AH равна M_3N_3, т. е. треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование

Нетрудно сообразить, что задача имеет решение не при любых данных отрезках M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3. В самом деле, если хотя бы один из отрезков M_1N_1 и M_2N_2 меньше M_3N_3, то задача не имеет решения, так как наклонные AB и AC не могут быть меньше перпендикуляра AH. Задача не имеет

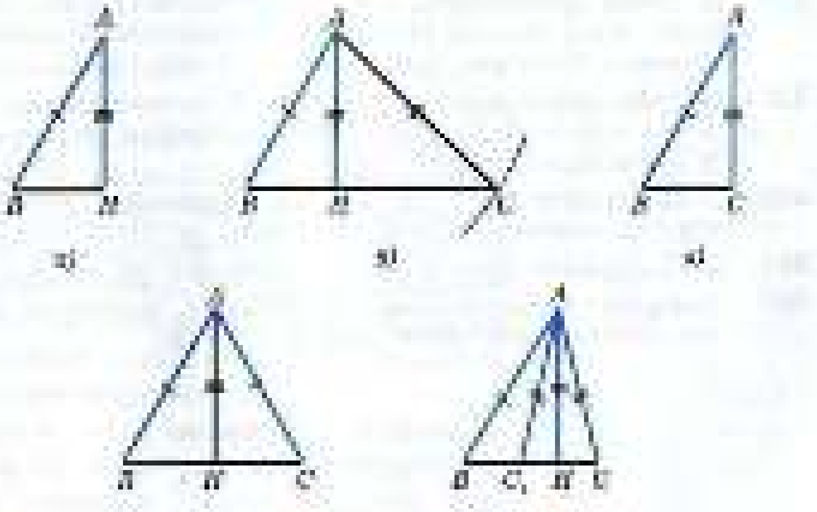


Рис. 149

решения и в том случае, когда $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$ (объясните почему). В остальных случаях задача имеет решения. Если $M_1N_1 > M_2N_2$ и $M_3N_3 = M_2N_2$, то задача имеет единственное решение: в этом случае сторона AC совпадает с высотой AH и искомый треугольник является прямоугольным (рис. 149, в). Если $M_1N_1 > M_2N_2$ и $M_3N_3 = M_1N_1$, то задача также имеет единственное решение: в этом случае треугольник ABC равнобедренный (рис. 149, г). И наконец, если $M_1N_1 > M_2N_2$, $M_3N_3 > M_2N_2$ и $M_3N_3 \neq M_1N_1$, то задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 149, д.

352 Даны две точки A и B и прямая a, не проходящая через эти точки. На прямой a постройте точку, равноудалённую от точек A и B. Всегда ли задача имеет решение?

353 □ Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудалённую от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

354 □ Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

355 □ Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Постройте точку M прямой a так, чтобы сумма $AM + MB$ имела наименьшее значение, т. е. была бы меньше суммы $AX + XB$, где X — любая точка прямой a, отличная от M.

356 □ Постройте прямоугольный треугольник ABC, если даны острый угол B и биссектриса BD.

357 □ На данной окружности постройте точку, равноудалённую от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

358 □ Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудалённую от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

359 □ Даны окружность с центром O и точка A вне её. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB = BC$.

360 □ Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведённой из вершины другого угла.

361 □ Постройте треугольник по периметру и двум углам.

362 Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.

Глава V

Четырёхугольники

До сих пор в центре нашего внимания был самый простой из многоугольников — треугольник. В этой главе будем изучать более сложные многоугольники, в основном различные виды четырёхугольников: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Кроме того, в этой главе речь пойдёт о симметрии геометрических фигур, в том числе указанных четырёхугольников. Симметрия играет важную роль не только в геометрии, но и искусстве, архитектуре, технике. В окружающей обстановке мы видим немало симметричных предметов — фасадов зданий, узоры на коврах и тканях, листья деревьев.

§1 Многоугольники

40 Многоугольник

Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков AB, BC, CD, ..., EF, FG так, что смежные отрезки (т. е. отрезки AB и BC, BC и CD, ..., EF и FG) не лежат на одной прямой. Такая фигура называется **ломаной** $ABCD...FG$ (рис. 150, *а*). Отрезки, из которых составлена ломаная, называются её **звеньями**, а концы этих отрезков — **вершинами ломаной**. Сумма длин всех звеньев называется **длиной ломаной**. Концы ломаной $ABCD ... FG$, т. е. точки A и G, могут быть различными, а могут совпадать (рис. 150, *б*). В последнем случае ломаная называется **замкнутой**, и её звенья FG и AB также считаются смежными. Если несмежные звенья замкнутой ломаной не имеют общих точек, то эта ломаная называется **многоугольником**, её звенья называются **сторонами многоугольника**, а длина ломаной называется **периметром многоугольника**.

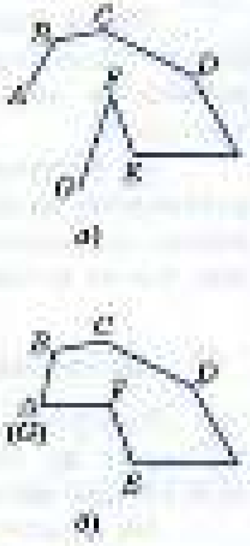


Рис. 150

Многоугольник с n вершинами называется n-угольником; он имеет n сторон. Примером многоугольника является треугольник. На рисунке 151 изображены четырёхугольник $ABCD$ и

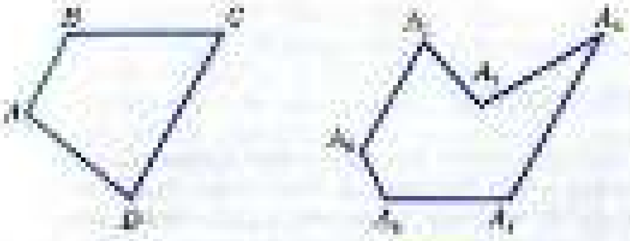


Рис. 151

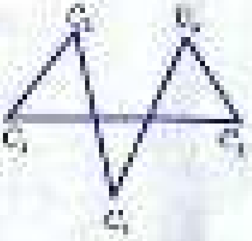


Рис. 152

шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Фигура, изображённая на рисунке 152, не является многоугольником, так как несоседние отрезки C_1C_2 и C_3C_4 (а также C_2C_3 и C_4C_5) имеют общую точку.

Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются **соседними**. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется **диагональю** многоугольника.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** многоугольника.

Рис. 153

На рисунке 153 внутренние области многоугольников закрашены. Фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

41 Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

На рисунке 154 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображённый на рисунке 155, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются углами этого многоугольника. Найдём их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате полу-

Рис. 154

при $n-2$ треугольника (рис. 155, б), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ равна $(n-2) \cdot 180°$.

Итак, сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$.

Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с углом многоугольника. Если при каждой вершине выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ взять по одному внешнему углу, то сумма этих внешних углов окажется равной

$$180° - A_1 + 180° - A_2 + \ldots + 180° - A_n =$$
$$= n \cdot 180° - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$
$$= n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°.$$

Таким образом, сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.

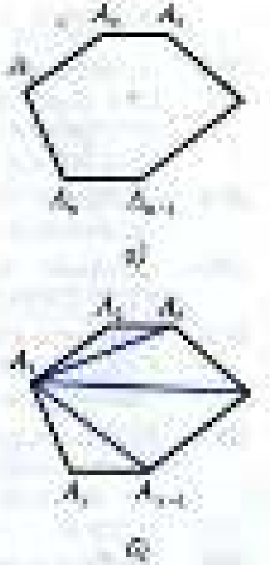


Рис. 155

42 Четырёхугольник

Каждый четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали (рис. 156). Две несмежные стороны четырёхугольника называются **противоположными**. Две вершины, не являющиеся соседними, также называются **противоположными**.

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые. На рисунке 156, а изображён выпуклый четырёхугольник, а на рисунке 156, б — невыпуклый.

Каждая диагональ выпуклого четырёхугольника разделяет его на два треугольника. Одна из диагоналей невыпуклого четырёхугольника также разделяет его на два треугольника (см. рис. 156, б).

Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, то сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

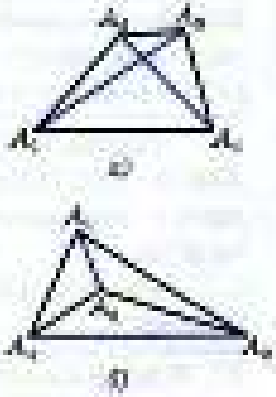


Рис. 156

Задачи

363 Начертите выпуклые пятиугольник и шестиугольник. В каждом многоугольнике из какой-нибудь вершины проведите все диагонали. На сколько треугольников разделяют проведённые диагонали каждый многоугольник?

364 Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

365 Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 108°?

366 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 8 см, а одна сторона больше каждой из других сторон соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

367 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвёртая — в три раза больше второй.

368 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они равны друг другу.

369 Найдите углы A, B и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135°$.

370 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

§2 Параллелограмм и трапеция

43 Параллелограмм

Определение

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке 157 изображён параллелограмм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм является выпуклым четырёхугольником (см. задачу 378).

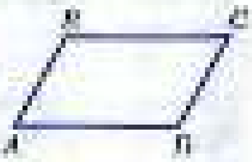


Рис. 157

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

1°. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 158). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому

$$AB = CD,\ AD = BC \text{ и } \angle B = \angle D.$$

Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем

$$\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C.$$

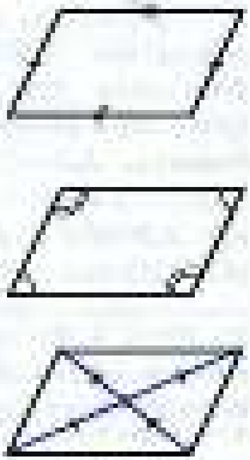
Рис. 158

Рис. 159

2°. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому $AO = OC$ и $OB = OD$, что и требовалось доказать.

Рисунок 160 иллюстрирует все рассмотренные свойства.



Свойства параллелограмма

Рис. 160

44 Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

1°. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$ (см. рис. 158).

Проведём диагональ AC, разделяющую данный четырёхугольник на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум стороне и углу между ними (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, $AD \parallel BC$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, и, значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2°. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Проведём диагональ AC данного четырёхугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA (см. рис. 158). Эти треугольники равны по трём сторонам (AC — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = DA$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то по признаку 1° четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

3°. Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см. рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1° четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

45 Трапеция

Рис. 161

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а две другие стороны — **боковыми сторонами** (рис. 161).

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны (рис. 162, а).

Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной** (рис. 162, б).


Равнобедренная трапеция
а)


Прямоугольная трапеция
б)

Рис. 162

Задачи

371 Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

372 Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если:
а) одна сторона на 3 см больше другой;
б) разность двух сторон равна 7 см;
в) одна из сторон в два раза больше другой.

373 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, $\angle C = 30°$, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

374 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK = 15$ см, $KC = 9$ см.

375 Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

376 Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если: а) $\angle A = 84°$; б) $\angle A - \angle B = 55°$; в) $\angle A + \angle C = 142°$; г) $\angle A = 2\angle B$; д) $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$.

377 В параллелограмме $MNPQ$ проведён перпендикуляр NH к прямой MQ, причём точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3$ см, $HQ = 5$ см, $\angle MNH = 30°$.

378 Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.

Решение

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 157) и докажем, что он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Возьмём, например, прямую AB. Отрезок CD не имеет общих точек с прямой AB, так как $AB \parallel CD$. Значит, этот отрезок лежит по одну сторону от прямой AB. Но тогда и отрезки BC и AD лежат по ту же сторону от прямой AB. Таким образом, параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB.

379 Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$, у которого $AB \neq BC$ и угол A острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $BMDK$ — параллелограмм.

380 На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

381 На рисунке 163 изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB, длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колёс, передаёт движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

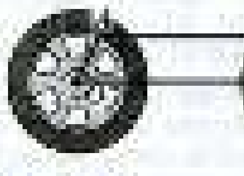


Рис. 163

382 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD, — параллелограмм.

383 На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырёхугольник $APCQ$ — параллелограмм.

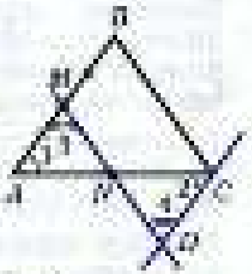


Рис. 164

384 Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Эта прямая пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что $AN = NC$.

Решение

Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой D точку пересечения этой прямой с прямой MN (рис. 164). Так как $AM = MB$ по условию, а $MB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма $BCDM$, то $AM = DC$. Треугольники AMN и CDN равны по стороне и при-

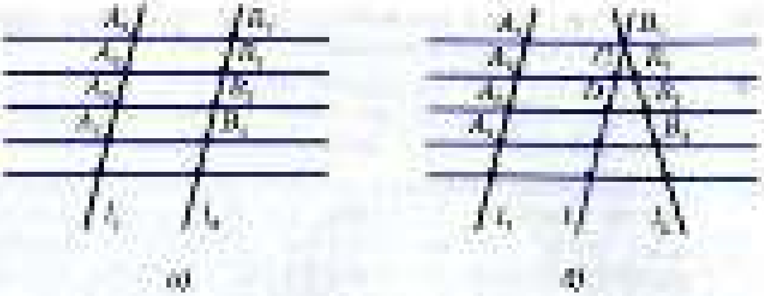


Рис. 165

знаку равенства треугольников ($AM = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и MD), поэтому $AN = NC$.

385 **Докажите теорему Фалеса**[1]**: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.**

Решение

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, а). Тогда $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $B_1B_2 = B_2B_3$. Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведём прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, б). Она пересечёт прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то по доказанному $B_1C = CD$. Отсюда получаем: $B_1B_2 = B_2B_3$ (задача 384). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д.

386 Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

387 Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

388 Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны.

389 Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.

[1] Фалес Милетский — древнегреческий учёный (ок. 625—547 гг. до н. э.).

390 Один из углов равнобедренной трапеции равен 68°. Найдите остальные углы трапеции.

391 Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

392 Основания прямоугольной трапеции равны a и b, один из углов равен α. Найдите: а) бо́льшую боковую сторону трапеции, если $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60°$; б) меньшую боковую сторону трапеции, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45°$.

393 Постройте параллелограмм: а) по двум смежным сторонам и углу между ними; б) по двум диагоналям и углу между ними; в) по двум смежным сторонам и соединяющей их концы диагонали.

Решение

в) Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 166, а). Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны, скажем AB и AD, равны соответственно отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3. Проведём решение задачи по схеме, описанной на с. 94.

Анализ

Допустим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 166, б). Мы видим, что стороны треугольника ABD равны данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3. Это обстоятельство подсказывает следующий путь решения задачи: сначала нужно построить по трём сторонам треугольник ABD, а затем достроить его до параллелограмма $ABCD$.

Построение

Строим треугольник ABD так, чтобы его стороны AB, AD и BD равнялись соответственно отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 (как это сделать, мы знаем из курса 7 класса). Затем проводим прямую, проходящую через точку B параллельно AD, и вторую прямую, проходящую через точку D параллельно AB (как это сделать, мы также знаем из курса 7 класса). Точку пересечения этих прямых обозначим буквой C (рис. 166, в). Четырёхугольник $ABCD$ и есть искомый параллелограмм.

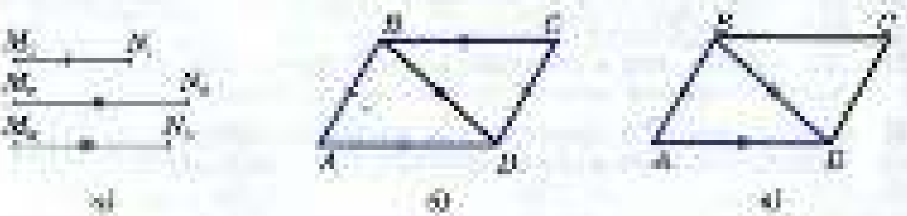


Рис. 166

Доказательство

По построению $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, поэтому $ABCD$ — параллелограмм. Смежные стороны параллелограмма $ABCD$ по построению равны отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3, т. е. параллелограмм $ABCD$ — искомый.

Исследование

Ясно, что если по трём данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 можно построить треугольник ABD, стороны которого равны этим отрезкам, то можно построить и параллелограмм $ABCD$. Но треугольник ABD можно построить не всегда. Если какой-то из трёх данных отрезков больше или равен сумме двух других, то треугольник ABD, а значит, и параллелограмм $ABCD$ построить нельзя. Попробуйте самостоятельно доказать, что если задача имеет решение, то это решение единственно (см. п. 39).

384 Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм так, чтобы три его вершины совпадали с данными точками. Сколько таких параллелограммов можно построить?

385 Даны острый угол hk и два отрезка P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы расстояние между параллельными прямыми AB и DC равнялось P_1Q_1, $AB = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

386 Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

Решение

Проведём луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нём от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 107), т. е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (на рисунке 107 $n = 5$). Проведём прямую A_nB (точка A_n — конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} и параллельные прямой A_nB. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые по теореме Фалеса (задача 385) делят отрезок AB на n равных частей.

Рис. 107

387 ☐ Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$:
а) по основанию AD, углу A и боковой стороне AB;
б) по основанию BC, боковой стороне AB и диагонали BD.

388 ☐ Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AB, перпендикулярной к основаниям.

§3 Прямоугольник, ромб, квадрат

46 Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Так как прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма: в прямоугольнике противоположные стороны равны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Рассмотрим особое свойство прямоугольника.

Диагонали прямоугольника равны.

Действительно, обратимся к рисунку 168, на котором изображён прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD = BA$, AD — общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $AC = BD$, что и требовалось доказать.

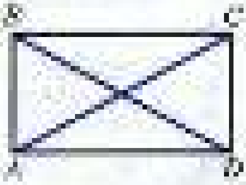


Рис. 168

Докажем обратное утверждение (признак прямоугольника).

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны (см. рис. 168). Треугольники ABD и DCA равны по трём сторонам ($AB = DC$, $BD = CA$, AD — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Таким образом, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, поэтому $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

47 Ромб и квадрат

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Наряду с ними ромб обладает особым свойством. Рассмотрим его.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

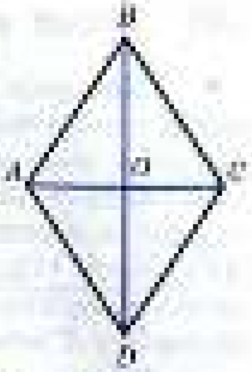


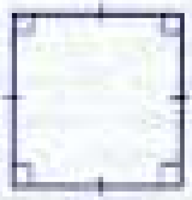
Рис. 169

Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 169). Требуется доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и каждая диагональ делит соответствующие углы ромба пополам. Докажем, например, что $\angle BAC = \angle DAC$.

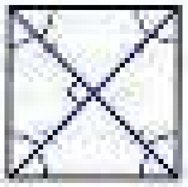
По определению ромба все его стороны равны, в частности $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Так как ромб является параллелограммом, то его диагонали точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, отрезок AO — медиана равнобедренного треугольника BAD, проведённая к основанию, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Прямоугольник является параллелограммом, поэтому и квадрат является параллелограммом, у которого все стороны равны, т. е. ромбом. Отсюда следует, что квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Сформулируем основные свойства квадрата.



а)



б)

Свойства квадрата

Рис. 170

1. Все углы квадрата прямые (рис. 170, а).
2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам (рис. 170, б).

48 Осевая и центральная симметрия

Две точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой a, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 171, *а*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе. На рисунке 171, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно прямой b, а точка P симметрична самой себе относительно этой прямой.

Фигура называется симметричной относительно прямой a, **если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой** a **также принадлежит этой фигуре.** Прямая a называется **осью симметрии фигуры**. Говорят также, что фигура обладает осевой симметрией.

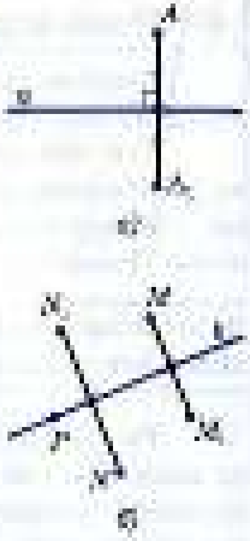
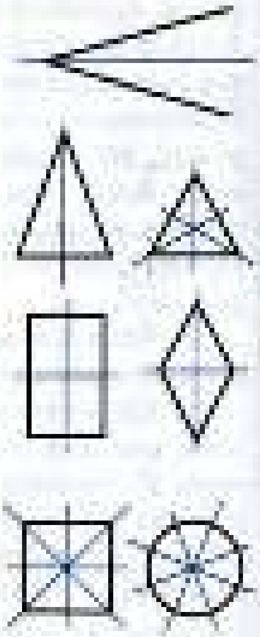


Рис. 171

Приведём примеры фигур, обладающих осевой симметрией (рис. 172). У неразвёрнутого угла одна ось симметрии — прямая, на которой расположена биссектриса угла. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет также одну ось симметрии, а равносторонний треугольник — три оси симметрии. Прямоугольник и ромб, не являющиеся квадратами, имеют по две оси симметрии, а квадрат — четыре оси симметрии. У окружности их бесконечно много — любая прямая, проходящая через её центр, является осью симметрии.

Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии. К таким фигурам относятся параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба, разносторонний треугольник.

Две точки A **и** A_1 **называются симметричными относительно точки** O, **если** O **— середина отрезка** AA_1 (рис. 173, *а*). Точка O считается симметричной самой себе. На рисунке 173, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно точки O, а точки P и Q не симметричны относительно этой точки.



Фигуры, обладающие осевой симметрией

Рис. 172

Фигура называется симметричной относительно точки O, **если для каждой точки фигу-**

ры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется **центром симметрии фигуры**. Говорят также, что фигура обладает центральной симметрией.

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм (рис. 174). Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точка O на рисунке 174), у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является её центром симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является произвольный треугольник.

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии или центр симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно среднего стебля (рис. 175).

С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией (рис. 176). В большинстве случаев симметричны относительно оси или центра узоры на коврах, тканях, комнатных обоях. Симметричны многие детали механизмов, например зубчатые колёса.

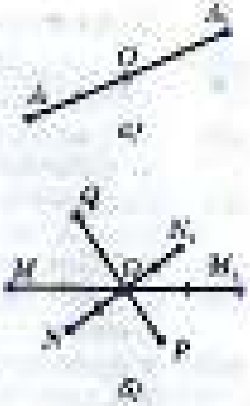
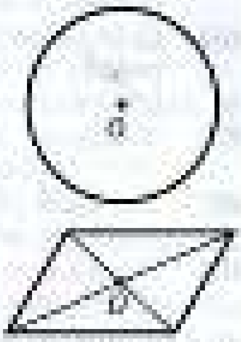


Рис. 173



Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 174

Рис. 175

Рис. 176

Задачи

399 Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

400 Докажите, что если в четырёхугольнике все углы прямые, то четырёхугольник — прямоугольник.

401 Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит сторону: а) BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

402 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

403 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см.

404 Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

405 В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

406 Найдите периметр ромба $ABCD$, в котором $\angle B = 60°$, $AC = 10,5$ см.

407 Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°.

408 Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ делит его углы пополам.

409 Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

410 Является ли четырёхугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?

411 В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырёхугольник — квадрат.

412 Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, катетом $AC = 12$ см и квадрат $CDEF$, такой, что две его стороны лежат на катетах, а вершина E — на гипотенузе треугольника. Найдите периметр квадрата.

413 Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

414 Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу.

415 □ Постройте квадрат: а) по стороне; б) по диагонали.

416 □ Даны две точки A и B, симметричные относительно некоторой прямой, и точка M. Постройте точку, симметричную точке M относительно той же прямой.

417 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?

418 Какие из следующих букв имеют ось симметрии: **А, Б, Г, Е, О, F**?

419 □ Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

420 □ Докажите, что прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии треугольника.

421 □ Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно середины отрезка AB.

422 Имеют ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) пара пересекающихся прямых; г) квадрат?

423 Какие из следующих букв имеют центр симметрии: **А, О, М, Х, К**?

Вопросы для повторения к главе V

1 Объясните, какая фигура называется ломаной. Что такое звенья, вершины и длина ломаной?

2 Объясните, какая ломаная называется многоугольником. Что такое вершины, стороны, периметр и диагонали многоугольника?

3 Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.

4 Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.

5 Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

6 Начертите четырёхугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные вершины.

7 Чему равна сумма углов выпуклого четырёхугольника?

8 Дайте определение параллелограмма. Является ли параллелограмм выпуклым четырёхугольником?

9 Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

10 Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

11 Сформулируйте и докажите утверждения о признаках параллелограмма.

12 Какой четырёхугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?

13 Какая трапеция называется равнобедренной? прямоугольной?

14 Какой четырёхугольник называется прямоугольником? Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

15 Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то параллелограмм является прямоугольником.

16 Какой четырёхугольник называется ромбом? Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

17 Какой четырёхугольник называется квадратом? Перечислите основные свойства квадрата.

18 Какие две точки называются симметричными относительно данной прямой?

19 Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?

20 Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

21 Какая фигура называется симметричной относительно данной точки?

22 Приведите примеры фигур, обладающих: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией; в) и осевой, и центральной симметрией.

Дополнительные задачи

424 Докажите, что если не все углы выпуклого четырёхугольника равны друг другу, то хотя бы один из них тупой.

425 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $AB = 14$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла A? Найдите отрезки, которые образуются при этом пересечении.

426 Стороны параллелограмма равны 10 см и 3 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка. Найдите эти отрезки.

427 Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Докажите, что периметр получившегося четырёхугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

428 В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при их пересечении образуется прямоугольник.

429 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если сумма углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180°.

430 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если его противоположные углы попарно равны.

431 Точка K — середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AD = \frac{1}{3}AC$.

432 Точки M и N — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AN и MC делят диагональ BD на три равные части.

433 Из вершины B ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и BM к прямым AD и DC. Докажите, что луч BD является биссектрисой угла KBM.

434 Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

435 Докажите, что середина отрезка, соединяющего вершину треугольника с любой точкой противоположной стороны, лежит на отрезке с концами в серединах двух других сторон.

436 Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой AC, пересекает прямые BC и CD соответственно в точках M и N. Найдите MN.

437 На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная к прямой AC и пересекающая BC в точке H. Докажите, что $BH = HM = MC$.

438 В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите AD, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60°$.

439* □ Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

440* □ На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

441 Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

442 Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

443 Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

444* □ Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

Глава VI

Площадь

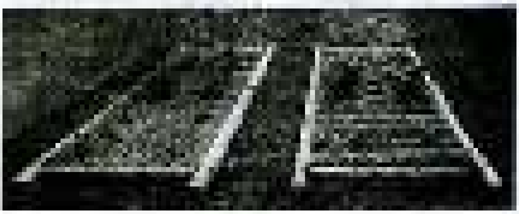
Что такое площадь комнаты и как её вычислить, если пол в комнате имеет форму прямоугольника, понятно каждому. В этой главе речь пойдёт об измерении площадей многоугольников и будут выведены формулы, по которым можно вычислить площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. Эти формулы нужны не только в геометрии, но и в практической деятельности. Кроме того, используя формулы площадей, мы докажем одну из важнейших и самых знаменитых теорем геометрии — теорему Пифагора.

§1 Площадь многоугольника

49 Понятие площади многоугольника

Понятие площади нам известно из повседневного опыта. Каждый понимает смысл слов: площадь комнаты равна шестнадцати квадратным метрам, площадь садового участка — восемь соток и т. д. В этой главе мы рассмотрим вопрос о площадях многоугольников.

Можно сказать, что площадь многоугольника — это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник. Измерение площадей проводится с помощью выбранной единицы измерения аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Так, если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 см. Такой квадрат называется **квадратным сантиметром** и обозначается см². Аналогично определяется **квадратный метр** (м²), **квадратный миллиметр** (мм²) и т. д.



При выбранной единице измерения площадей площадь каждого многоугольника выражается положительным числом. Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данном многоугольнике. Рассмотрим примеры. На рисунке 177, а изображён прямоугольник, в котором квадратный сантиметр укладывается ровно 6 раз. Это означает, что площадь прямоугольника равна 6 см².

В трапеции $ABCD$, изображённой на рисунке 177, б, квадратный сантиметр укладывается два раза и остаётся часть трапеции — треугольник CDE, в котором квадратный сантиметр не укладывается целиком. Для измерения площади этого треугольника нужно использовать доли квадратного сантиметра, например квадратный миллиметр. Он составляет 0,01 часть квадратного сантиметра. Это показано на рисунке 177, в, где квадратный сантиметр разбит на 100 квадратных миллиметров (этот рисунок, а также рисунок 177, г для большей наглядности даны в увеличенном масштабе).

На рисунке 177, г видно, что квадратный миллиметр укладывается в треугольнике CDE 14 раз, и остаётся часть этого треугольника (она закрашена на рисунке), в которой квадратный миллиметр не укладывается целиком. Поэтому можно сказать, что площадь трапеции $ABCD$ приближённо равна 2,14 см².

Оставшуюся часть треугольника CDE можно измерить с помощью более мелкой доли квадратного сантиметра и получить более точное значение площади трапеции.

Описанный процесс измерения можно продолжать далее, однако на практике он неудобен.

Обычно измеряют лишь некоторые связанные с многоугольником отрезки, а затем вычисляют площадь по определённым формулам.

Вывод этих формул основан на свойствах площадей, которые мы сейчас рассмотрим.

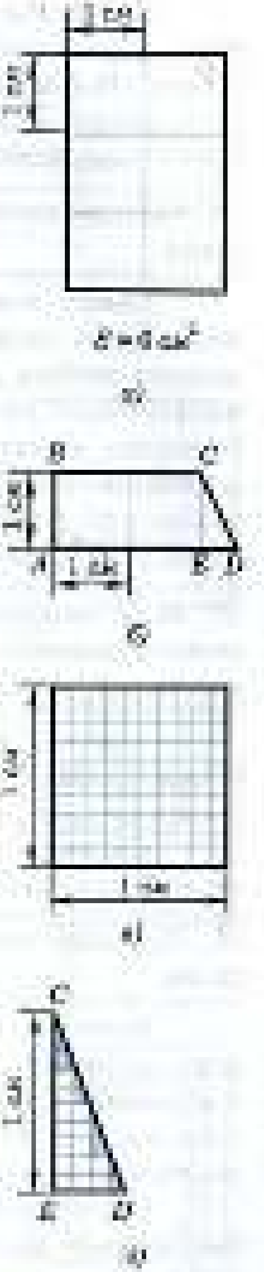


Рис. 177

Прежде всего отметим, что если два многоугольника равны, то единица измерения площадей и её части укладываются в таких многоугольниках одинаковое число раз, т. е. имеет место следующее свойство:

1°. Равные многоугольники имеют равные площади.

Далее, пусть многоугольник составлен из нескольких многоугольников так, что внутренние области любых двух из этих многоугольников не имеют общих точек, как показано на рисунке 178. Очевидно, величина части плоскости, занимаемой всем многоугольником, является суммой величин тех частей плоскости, которые занимают составляющие его многоугольники. Итак:

2°. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

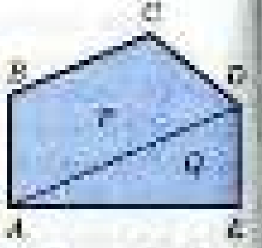
Свойства 1° и 2° называют **основными свойствами площадей**. Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков.

Наряду с этими свойствами нам понадобится ещё одно свойство площадей.

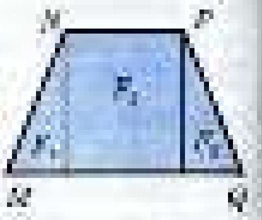
3°. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Краткую формулировку этого свойства следует понимать так: если сторона квадрата при выбранной единице измерения отрезков выражается числом a, то площадь этого квадрата выражается числом a^2.

На рисунке 179 изображён квадрат, сторона которого равна 2,1 см. Он состоит из четырёх квадратных сантиметров и сорока одного квадратного миллиметра. Таким образом, площадь квадрата равна 4,41 см², что равно квадрату его стороны: $4{,}41 = (2{,}1)^2$. Доказательство утверждения 3° приведено в следующем пункте.

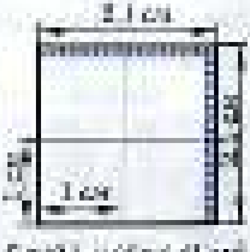


$S_{ABCDE} = S_P + S_Q$



$S_{MNPQ} = S_1 + S_2 + S_3$

Рис. 178



$S = (2{,}1\ см)^2 = 4{,}41\ см^2$

Рис. 179

Если площади двух многоугольников равны, то эти многоугольники называются **равновеликими**. Если один многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из них составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называются **равносоставленными**. Например, прямоугольник со сторонами, равными 2 см и 3 см (см. рис. 177, а), равносоставлен с прямоугольником со сторонами, равными 1 см и 6 см. Ясно, что любые два равносоставленных многоугольника равновелики (см. основные свойства площадей). Оказывается, что верно и обратное утверждение: если два многоугольника равновелики, то они равносоставленные. Это утверждение называется теоремой Бойяи — Гервина. Венгерский математик Ф. Бойяи доказал эту теорему в 1832 г., а немецкий математик-любитель П. Гервин независимо от Ф. Бойяи доказал её в 1833 г.

50* Площадь квадрата

Докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2.

Начнём с того случая, когда $a = \frac{1}{n}$, где n — целое число. Возьмём квадрат со стороной 1 и разобьём его на n^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, а (на этом рисунке $n = 5$). Так как площадь большого квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$, т. е. равна a. Итак,

$$S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2. \qquad (1)$$

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может быть целым, и тогда $n = 0$). Тогда число $m = a \cdot 10^n$ целое. Разобьём данный квадрат со стороной a на

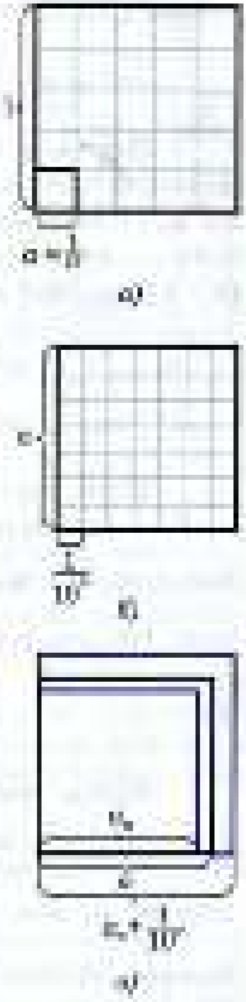


Рис. 180

m^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, б (на этом рисунке $m = 7$).

При этом каждая сторона данного квадрата разобьётся на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна

$$\frac{a}{m} = \frac{a}{a\cdot 10^n} = \frac{1}{10^n}.$$

По формуле (1) площадь маленького квадрата равна $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$$m^2\cdot\left(\frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{m}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{a\cdot 10^n}{10^n}\right)^2 = a^2.$$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число a_n, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го. Так как число a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то $a_n \leq a \leq a_n + \frac{1}{10^n}$, откуда

$$a_n^2 \leq a^2 \leq \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной a_n и площадью квадрата со стороной $a_n + \frac{1}{10^n}$ (рис. 180, в), т. е. между a_n^2 и $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2 \leq S \leq \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа a_n^2. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно число отличается от числа a^2. Следовательно, эти числа равны: $S = a^2$, что и требовалось доказать.

51 Площадь прямоугольника

Теорема

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a, b и площадью S (рис. 181, а). Докажем, что $S = ab$.

Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$, как показано на рисунке 181, б. По свойству 3° площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$.

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S (свойство 1° площадей) и двух квадратов с площадями a^2 и b^2 (свойство 3° площадей). По свойству 2° имеем:

$$(a + b)^2 = S + S + a^2 + b^2, \text{ или}$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2.$$

Отсюда получаем: $S = ab$. Теорема доказана.

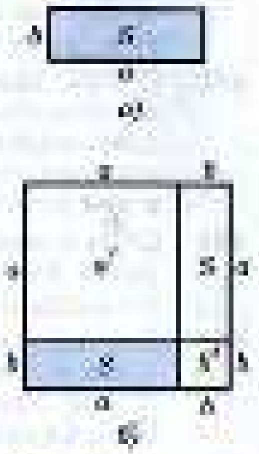


Рис. 181

Задачи

445 Вырежите из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм, отличный от прямоугольника. Сравните площади полученных фигур.

446 Начертите квадрат и примите его за единицу измерения площадей. Далее начертите: а) квадрат, площадь которого выражается числом 4; б) прямоугольник, отличный от квадрата, площадь которого выражается числом 4; в) треугольник, площадь которого выражается числом 2.

447 Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

448 На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причём точка M — середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

449 Найдите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 1,2 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

450 Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 16 см²; б) 2,25 дм²; в) 12 м².

451 Площадь квадрата равна 24 см². Выразите площадь этого квадрата: а) в квадратных миллиметрах; б) в квадратных дециметрах.

452 Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Вычислите: а) S, если $a = 8,5$ см, $b = 3,2$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см; в) b, если $a = 32$ см, $S = 684,8$ см²; г) a, если $b = 4,5$ см, $S = 12,15$ см².

453 Как изменится площадь прямоугольника, если: а) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза; б) каждую сторону увеличить в два раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза, а другую — уменьшить в два раза?

454 Найдите стороны прямоугольника, если: а) его площадь равна 250 см², а одна сторона в 2,5 раза больше другой; б) его площадь равна 9 м², а периметр равен 12 м.

455 Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина — 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

456 Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?

457 Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 8 м и 18 м.

458 Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м, а второй имеет форму квадрата. Площадь какого участка больше и на сколько?

§2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

52 Площадь параллелограмма

Условимся одну из сторон параллелограмма называть основанием, а перпендикуляр, проведённый из любой точки противоположной стороны ная к прямой, содержащей основание, — **высотой параллелограмма**.

Теорема

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Доказательство

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ с площадью S. Примем сторону AD за основание и проведём высоты BH и CK (рис. 182). Докажем, что $S = AD \cdot BH$.

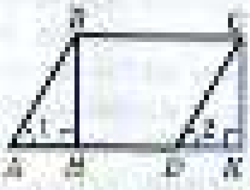


Рис. 182

Докажем сначала, что площадь прямоугольника $HBCK$ также равна S. Трапеция $ABCK$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCK. С другой стороны, она составлена из прямоугольника $HBCK$ и треугольника ABH. Но прямоугольные треугольники DCK и ABH равны по гипотенузе и острому углу (их гипотенузы AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, а углы 1 и 2 равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD), поэтому их площади равны.

Следовательно, площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCK$ также равны, т. е. площадь прямоугольника $HBCK$ равна S. По теореме о площади прямоугольника $S = BC \cdot BH$, а так как $BC = AD$, то $S = AD \cdot BH$. Теорема доказана.

53 Площадь треугольника

Одну из сторон треугольника часто называют его основанием. Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведённую к основанию.

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Доказательство

Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 183). Примем сторону AB за основание треугольника и проведём высоту CH. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH.$$

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 183. Треугольники ABC и DCB равны по трём сторонам (BC — их общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABDC$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$. Теорема доказана.

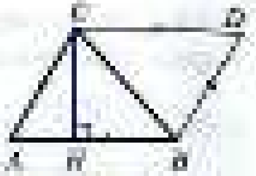


Рис. 183

Следствие 1

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Воспользуемся следствием 2 для доказательства теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

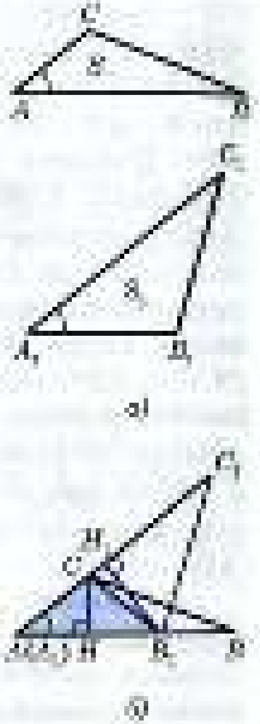


Рис. 184

Теорема

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Доказательство

Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 184, *а*). Докажем, что

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

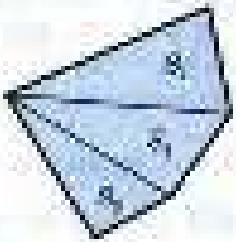
Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC (рис. 184, б). Треугольники ABC и AB_1C имеют общую высоту CH, поэтому $\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$. Треугольники AB_1C и AB_1C_1 также имеют общую высоту — B_1H_1, поэтому $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$. Перемножая полученные равенства, находим:

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}, \text{ или } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Теорема доказана.

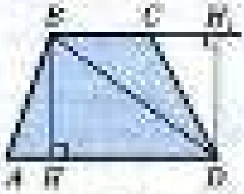
54 Площадь трапеции

Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника (рис. 185, а). Используя этот приём, выведем формулу для вычисления площади трапеции. Условимся называть **высотой трапеции** перпендикуляр, проведённый из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. На рисунке 185, б отрезок BH (а также отрезок DH_1) — высота трапеции $ABCD$.



$S = S_1 + S_2 + S_3$

а)



б)

Рис. 185

Теорема

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Доказательство

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S (см. рис. 182, б).

Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому $S = S_{ABD} + S_{BCD}$. Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD, а отрезки BC и DH_1 за основание и высоту треугольника BCD. Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH,\ S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DH_1.$$

Так как $DH_1 = BH$, то $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BH$.

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Теорема доказана.

Задачи

459 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь параллелограмма. Найдите: а) S, если $a = 15$ см, $h = 12$ см; б) a, если $S = 34$ см², $h = 8{,}5$ см; в) a, если $S = 162$ см², $h = \frac{1}{2}a$; г) h, если $h = 3a$, $S = 27$.

460 Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

461 Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см, а его острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

462 Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150°. Найдите площадь ромба.

463 Сторона параллелограмма равна 8,1 см, а диагональ, равная 14 см, образует с ней угол в 30°. Найдите площадь параллелограмма.

464 Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, S — площадь, а h_1 и h_2 — его высоты. Найдите: а) h_2, если $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см, $h_2 > h_1$; б) h_1, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см, $h_2 > h_1$; в) h_1 и h_2, если $S = 54$ см², $a = 4{,}5$ см, $b = 6$ см.

465 Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведённые из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

466 Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если большая его сторона равна 15,2 см, а один из его углов 45°.

467 Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

468 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь треугольника. Найдите: а) S, если $a = 7$ см, $h = 11$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см; в) h, если $S = 37{,}8$ см², $a = 14$ см; г) a, если $S = 12$ см², $h = 3\sqrt{2}$ см.

469 Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведённая к стороне AB, равна 11 см. Найдите высоту, проведённую к стороне BC.

470 Две стороны треугольника равны 7,5 см и 3,2 см. Высота, проведённая к большей стороне, равна 2,4 см. Найдите высоту, проведённую к меньшей из данных сторон.

471 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 11 см; б) 1,2 дм и 3 дм.

472 Площадь прямоугольного треугольника равна 168 см². Найдите его катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

473 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m, параллельная стороне AB. Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

474 Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.

475 Начертите треугольник ABC. Через вершину A проведите две прямые так, чтобы они разделили этот треугольник на три треугольника, имеющие равные площади.

476 Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площадь ромба, если его диагонали равны: а) 3,2 дм и 14 см; б) 4,6 дм и 2 дм.

477 Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27 см².

478 В выпуклом четырёхугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей.

479 Точки D и E лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC. Найдите: а) S_{ADE}, если $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $AD = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см²; б) AD, если $AB = 8$ см, $AC = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см², $S_{ADE} = 2$ см².

480 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если:
а) $AB = 21$ см, $CD = 17$ см, высота BH равна 7 см;
б) $\angle D = 30^\circ$, $AB = 2$ см, $CD = 10$ см, $DA = 8$ см;
в) $BC \perp AB$, $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $CD = 13$ см.

481 Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол равен 135°.

482 Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведённая из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

§3 Теорема Пифагора

55 Теорема Пифагора

Пользуясь свойствами площадей многоугольников, мы установим теперь замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника.

Теорема, которую мы докажем, называется **теоремой Пифагора**. Она является важнейшей теоремой геометрии.

Теорема

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 186, *а*). Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рисунке 186, *б*. Площадь S этого квадрата равна $(a + b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной c, поэтому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

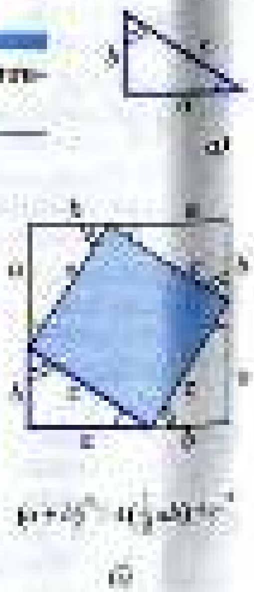


Рис. 186

Таким образом, $(a+b)^2 = 2ab + c^2$, откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема доказана.

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда ещё не знали её доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путём на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашёл доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам быка, по другим свидетельствам — даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более ста. С одним из них мы уже познакомились, ещё с одним познакомимся в следующей главе (задача 578). Многие известные мыслители и писатели прошлого обращались к этой замечательной теореме и посвятили ей свои строки.

Пифагор — древнегреческий учёный (VI в. до н. э.)

56 Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, и, значит,

$A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$. Но $AC^2 + BC^2 = AB^2$ по условию теоремы. Следовательно, $A_1B_1^2 = AB^2$, откуда $A_1B_1 = AB$.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, поэтому $\angle C = \angle C_1$, т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. Теорема доказана.

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25 (объясните почему).

Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются **пифагоровыми треугольниками**. Можно доказать, что катеты a, b и гипотенуза c таких треугольников выражаются формулами $a = 2k \cdot m \cdot n$, $b = k(m^2 - n^2)$, $c = k(m^2 + n^2)$, где k, m и n — любые натуральные числа, такие, что $m > n$.

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют **египетским треугольником**, так как он был известен ещё древним египтянам. Для построения прямых углов египтяне поступали так: на верёвке делали метки, делящие её на 12 равных частей, связывали концы верёвки и растягивали на земле с помощью кольев в виде треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым.

57 Формула Герона

Теорема

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c выражается формулой $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В любом треугольнике по крайней мере два угла острые. Пусть A и B — острые углы треугольника ABC. Тогда основание H высоты CH треугольника лежит на стороне AB. Введём обозначения: $CH = h$, $AH = y$, $HB = x$ (рис. 187). По теореме Пифагора $a^2 - x^2 = h^2 = b^2 - y^2$, откуда $y^2 - x^2 = b^2 - a^2$, или $(y - x)(y + x) = b^2 - a^2$. Так как $y + x = c$, то $y - x = \frac{1}{c}(b^2 - a^2)$. Сложив два последних равенства и разделив на 2, получим:

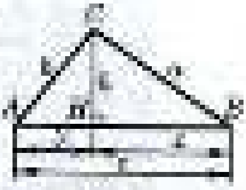


Рис. 187

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Поэтому

$$h^2 = b^2 - y^2 = (b + y)(b - y) =$$

$$= \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} =$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^2}.$$

Следовательно, $h = \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{c}$.

Но $S = \frac{1}{2}hc$, откуда и получаем:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Теорема доказана.

Выведенную нами формулу обычно называют формулой Герона, по имени древнегреческого математика Герона Александрийского, жившего предположительно в I в. н. э.

Задачи

483 ☐ Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам a и b:
а) $a = 6$, $b = 8$;
б) $a = 5$, $b = 6$;
в) $a = \frac{3}{7}$, $b = \frac{4}{7}$;
г) $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$.

484 В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, c — гипотенуза. Найдите b, если:
а) $a = 12$, $c = 13$;
б) $a = 7$, $c = 9$;
в) $a = 12$, $c = 2b$;
г) $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2b$;
д) $a = 3b$, $c = 2\sqrt{10}$.

485 Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60°, если гипотенуза равна c.

486 В прямоугольнике $ABCD$ найдите:
а) AD, если $AB = 5$, $AC = 13$;
б) BC, если $CD = 1{,}5$, $AC = 2{,}5$;
в) CD, если $BD = 17$, $BC = 15$.

487 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведённую к основанию.

488 Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна 6 см; б) сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 4 см.

489 Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна:
а) 5 см; б) 1,2 см; в) $2\sqrt{2}$ дм.

490 Найдите боковую сторону и площадь равнобедренного треугольника, если: а) основание равно 12 см, а высота, проведённая к основанию, равна 8 см; б) основание равно 18 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120°; в) треугольник прямоугольный и высота, проведённая к гипотенузе, равна 7 см.

491 ☐ По данным катетам a и b прямоугольного треугольника найдите высоту, проведённую к гипотенузе:
а) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 12$, $b = 16$.

492 Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

493 Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

494 Найдите диагональ и площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а другая диагональ — 12 см.

495 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если: а) $AB = 10$ см, $BC = DA = 13$ см, $CD = 20$ см; б) $\angle C = \angle D = 60°$, $AB = BC = 8$ см; в) $\angle C = \angle D = 45°$, $AB = 6$ см, $BC = 9\sqrt{2}$ см.

496 Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB, причём $AD = BC$. Найдите AC, если $AB = 3$, а $CD = \sqrt{3}$.

497 Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.

498 Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: а) 6, 8, 10; б) 5, 6, 7; в) 9, 12, 15; г) 10, 24, 26; д) 3, 4, 6; е) 11, 9, 13; ж) 15, 20, 25. В каждом случае ответ обоснуйте.

499 Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными: а) 24 см, 25 см, 7 см; б) 15 см, 17 см, 8 см.

Вопросы для повторения к главе VI

1 Расскажите, как измеряется площадь многоугольника.

2 Сформулируйте основные свойства площадей многоугольников.

3 Какие многоугольники называются равновеликими и какие равносоставленными?

4 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади прямоугольника.

5 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади параллелограмма.

6 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам?

7 Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей двух треугольников, имеющих по равному углу.

8 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади трапеции.

9 Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

10 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

11 Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры пифагоровых треугольников.

12 Какая формула площади треугольника называется формулой Герона? Выведите эту формулу.

Дополнительные задачи

800 Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведённой к гипотенузе.

801 Площадь земельного участка равна 27 га. Выразите площадь этого же участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах.

802 Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

803 Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 см², а точка пересечения диагоналей удалена от сторон на 2 см и 3 см.

804 Меньшая сторона параллелограмма равна 29 см. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит её на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

805 Докажите, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a, а другая — b, наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

806 □ Как провести две прямые через вершину квадрата, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны?

807* Каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

808* □ Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

809 Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от положения этой точки.

810* Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF равновеликие.

811 В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD диагонали пересекаются в точке O.
а) Сравните площади треугольников ABD и ACD.
б) Сравните площади треугольников ABO и CDO.
в) Докажите, что выполняется равенство $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

812* Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка.

513 Диагонали ромба равны 18 м и 24 м. Найдите периметр ромба и расстояние между параллельными сторонами.

514 Площадь ромба равна 540 см², а одна из его диагоналей равна 4,5 дм. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

515 Найдите площадь равнобедренного треугольника, если: а) боковая сторона равна 20 см, а угол при основании равен 30°; б) высота, проведённая к боковой стороне, равна 6 см и образует с основанием угол в 45°.

516 В треугольнике ABC $BC = 34$ см. Перпендикуляр MN, проведённый из середины BC к прямой AC, делит сторону AC на отрезки $AN = 25$ см и $NC = 15$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

517 Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см.

518 Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) её меньшее основание равно 18 см, высота — 9 см и острый угол равен 45°; б) её основания равны 16 см и 30 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

519 Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

520 Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а сумма оснований равна $2a$. Найдите площадь трапеции.

521 Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

522 В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ см, $BC = 5$ см и боковой стороной $AB = 10$ см через вершину B проведена прямая, делящая диагональ AC пополам и пересекающая основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника BDM.

523 Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причём сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

524 Стороны треугольника равны 13 см, 5 см и 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

525 Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до прямой AB равно 6 см, а до прямой AC равно 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

526 В ромбе высота, равная $\frac{4\sqrt{2}}{6}$ см, составляет $\frac{2}{3}$ большей диагонали. Найдите площадь ромба.

527 В равнобедренной трапеции диагональ равна 10 см, а высота равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

528 В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если боковая сторона CD трапеции равна 12 см, а расстояние от точки O до прямой CD равно 5 см.

529 Диагонали четырёхугольника равны 16 см и 20 см и пересекаются под углом в 30°. Найдите площадь этого четырёхугольника.

530 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC высота AD равна 8 см. Найдите площадь треугольника ABC, если медиана DM треугольника ADC равна 8 см.

531 Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 см и 8 см. Прямая, проходящая через вершину C и перпендикулярная к прямой BD, пересекает сторону AD в точке M, а диагональ BD — в точке K. Найдите площадь четырёхугольника $ABKM$.

532 В треугольнике ABC проведена высота BH. Докажите, что если:
а) угол A острый, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$;
б) угол A тупой, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

Глава VII

Подобные треугольники

Вокруг нас немало предметов, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры. Самый простой пример — большой и маленький мячи. В геометрии фигуры одинаковой формы называются подобными. Данная глава посвящена изучению подобных треугольников и признаков их подобия. Эти признаки широко используются в геометрии, в частности с их помощью будет доказано утверждение, сформулированное ещё при изучении геометрии в 7 классе: медианы треугольника пересекаются в одной точке. Кроме того, будет рассказано об использовании свойств подобных треугольников при проведении измерительных работ на местности.

§1 Определение подобных треугольников

58 Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$.

Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$. Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 3 см и 1,5 см. В самом деле,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}.$$

Понятие пропорциональности вводится и для большего числа отрезков. Так, например, три отрезка AB, CD и EF пропорциональны трём отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если справедливо равенство

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}.$$

59 Определение подобных треугольников

В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный и теннисный мячи, круглая тарелка и большое круглое блюдо. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Так, подобными являются любые два квадрата, любые два круга.

Введём понятие подобных треугольников.

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются **сходственными** (рис. 188).

Определение

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Другими словами, два треугольника подобны, если для них можно ввести обозначения ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

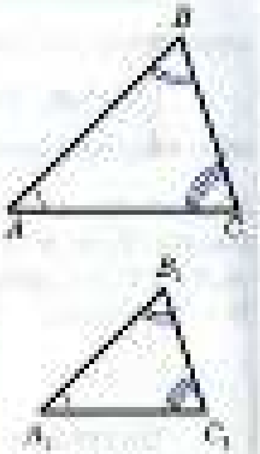
$$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1, \ \angle C = \angle C_1, \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k. \qquad (2)$$

Число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется **коэффициентом подобия**.

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. На рисунке 188 изображены подобные треугольники.

Оказывается, что подобие треугольников можно установить, проверив только некоторые из равенств (1) и (2). В следующем параграфе мы рассмотрим три признака подобия треугольников.



AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 — сходственные стороны

Рис. 188

60 Отношение площадей подобных треугольников

Теорема

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причём коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, п. 53). По формулам (2) имеем: $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$, поэтому $\frac{S}{S_1} = k^2$. Теорема доказана.

Задачи

533 Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины равны соответственно 15 см и 20 см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в миллиметрах?

534 Пропорциональны ли изображённые на рисунке 189 отрезки: а) AC, CD и M_1M_2, MM_1; б) AB, BC, CD и MM_2, MM_1, M_1M_2; в) AB, BD и MM_1, M_1M_2?

535 Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Решение

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ (рис. 190). Треугольники ABD и ACD имеют общую

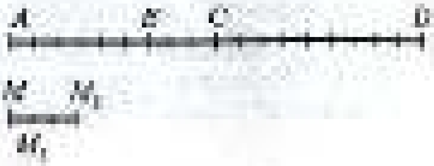


Рис. 189

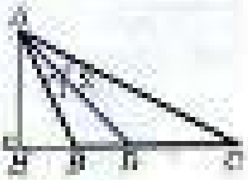


Рис. 190

высоту AH, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$. С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$. Из двух равенств для отношения площадей получим $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, или $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$, что и требовалось доказать.

536 ☐ Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC. а) Найдите AB, если $BC = 9$ см, $AD = 7{,}5$ см, $DC = 4{,}5$ см. б) Найдите DC, если $AB = 30$, $AD = 20$, $BC = 16$.

537 ☐ Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите BD и DC, если $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см.

538 ☐ Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки CD и BD, равные соответственно 4,5 см и 13,5 см. Найдите AB и AC, если периметр треугольника ABC равен 42 см.

539 ☐ В треугольник MNK вписан ромб $MDEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах MN, NK и MK. Найдите отрезки NE и EK, если $MN = 7$ см, $NK = 6$ см, $MK = 5$ см.

540 Периметр треугольника CDE равен 55 см. В этот треугольник вписан ромб $DMFN$ так, что вершины M, F и N лежат соответственно на сторонах CD, CE и DE. Найдите стороны CD и DE, если $CF = 8$ см, $EF = 12$ см.

541 Подобны ли треугольники ABC и DEF, если $\angle A = 106°$, $\angle B = 34°$, $\angle E = 106°$, $\angle F = 40°$, $AC = 4{,}4$ см, $AB = 5{,}2$ см, $BC = 7{,}6$ см, $DE = 15{,}6$ см, $DF = 22{,}8$ см, $EF = 13{,}2$ см?

542 ☐ В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM, BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN, если $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $\frac{KM}{AB} = 2{,}1$.

543 Докажите, что отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведённых к этим сторонам.

544 ☐ Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2. Одна из сторон второго треугольника равна 9 м. Найдите сходственную ей сторону первого треугольника.

545 ☐ Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, и их сходственные стороны относятся как $6:5$. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 77 см^2. Найдите площади треугольников.

546 ☐ План земельного участка имеет форму треугольника. Площадь изображённого на плане треугольника равна 87,5 см². Найдите площадь земельного участка, если план выполнен в масштабе 1 : 100 000.

547 Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

548 ☐ Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сходственные стороны BC и B_1C_1 соответственно равны 1,4 м и 56 см. Найдите отношение периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

549 ☐ Стороны данного треугольника равны 15 см, 20 см и 30 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 26 см.

§2 Признаки подобия треугольников

61 Первый признак подобия треугольников

Теорема

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 191). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$, и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

Докажем, что стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$ (см. п. 58).

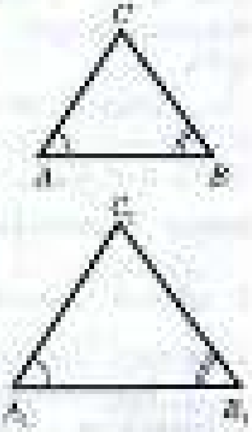


Рис. 191

Из этих равенств следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Итак, стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

62 Второй признак подобия треугольников

Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 192, а). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 192, б). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$.

С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle 1 = \angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

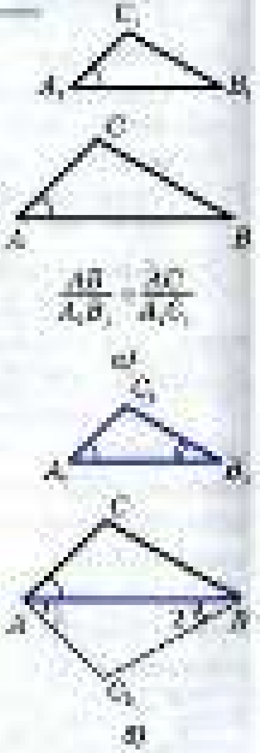


Рис. 192

63 Третий признак подобия треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle A=\angle A_1$. Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ (см. рис. 192, б). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{C_2A}{C_1A_1}$.

Сравнивая эти равенства с равенствами (1), получаем: $BC=BC_2$, $CA=C_2A$. Треугольники ABC и ABC_2 равны по трём сторонам. Отсюда следует, что $\angle A=\angle 1$, а так как $\angle 1=\angle A_1$, то $\angle A=\angle A_1$. Теорема доказана.

Задачи

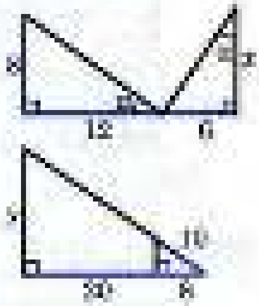


Рис. 193

560 По данным рисунка 193 найдите x и y.

561 На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE=8$ см, $EC=4$ см, $BC=7$ см, $AE=10$ см; б) DE и EC, если $AB=8$ см, $AD=5$ см, $CF=2$ см.

562 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Найдите: а) AB, если $OB=4$ см, $OD=10$ см, $DC=25$ см; б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB=a$, $DC=b$; в) AO, если $AB=9{,}6$ дм, $DC=24$ см, $AC=15$ см.

553 Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по равному острому углу; б) по равному тупому углу; в) по прямому углу? Ответ обоснуйте.

554 Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

555 Точки M, N и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причём $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырёхугольника $AMNP$, если: а) $AB = 10$ см, $AC = 15$ см, $PN : MN = 2 : 3$; б) $AM = AP$, $AB = a$, $AC = b$.

556 Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD (рис. 194).

Решение

Проведём через точку A прямую AC_1, параллельную прямой BD (C_1 — точка пересечения этой прямой с прямой CD). Тогда $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$), следовательно, $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$. Так как $AC_1 = BD$ (объясните почему), то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, что и требовалось доказать.

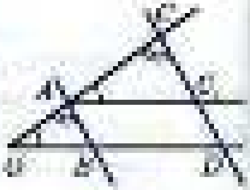


Рис. 194

557 Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и DE, причём точки B и D лежат на одной стороне угла, а C и E — на другой. Найдите: а) AC, если $CE = 10$ см, $AD = 22$ см, $BD = 8$ см; б) BD и DE, если $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $CE = 4$ см; в) BC, если $AB : BD = 2 : 1$ и $DE = 12$ см.

558 Прямые a и b пересечены параллельными прямыми AA_1, BB_1, CC_1, причём точки A, B и C лежат на прямой a, а точки A_1, B_1 и C_1 — на прямой b. Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

559 На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и AFB? Ответ обоснуйте.

560 Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $A_1B_1 = 4,5$ см, $B_1C_1 = 7,5$ см, $C_1A_1 = 10,5$ см; б) $AB = 1,7$ см, $BC = 3$ см, $CA = 4,2$ см, $A_1B_1 = 34$ дм, $B_1C_1 = 60$ дм, $C_1A_1 = 84$ дм?

561 Докажите, что два равносторонних треугольника подобны.

562 В треугольнике ABC сторона AB равна a, а высота CH равна h. Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC так, что две соседние вершины квадрата лежат на стороне AB, а две другие — соответственно на сторонах AC и BC.

563 Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M — середина отрезка AD; б) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

§3 Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

64 Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

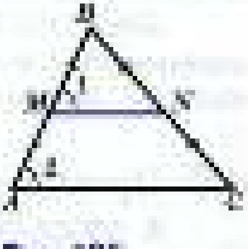


Рис. 195

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства — что $MN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

Пользуясь этой теоремой, решим следующую задачу:

Задача 1

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведём среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (рис. 196). Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому углы 1 и 2, а также углы 3 и 4 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущими AA_1 и BB_1. Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны:

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O.

Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

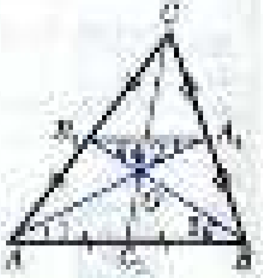


Рис. 196

65 Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Задача 2

Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Решение

Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник с прямым углом C, CD — высота, проведённая из вершины C к гипотенузе AB (рис. 197). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

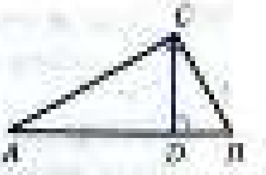


Рис. 197

Треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$). Точно так же подобны треугольники ABC и CBD ($\angle B$ — общий и $\angle ACB = \angle BDC = 90°$), поэтому $\angle A = \angle BCD$. Наконец, треугольники ACD и CBD также подобны по первому признаку подобия (в этих треугольниках углы с вершиной D прямые и $\angle A = \angle BCD$), что и требовалось доказать.

Отрезок XY называется **средним пропорциональным** (или **средним геометрическим**) для отрезков AB и CD, если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}.$$

Исходя из задачи 2, докажем следующие утверждения:

1°. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle CBD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, откуда $CD^2 = AD \cdot DB$, следовательно,

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}.$$

2°. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.

В самом деле, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, и, следовательно,

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

66 Практические приложения подобия треугольников

Задачи на построение

При решении многих задач на построение треугольников применяют так называемый метод подобия. Он состоит в том, что сначала на основании некоторых данных строят треугольник, подобный искомому, а затем, используя остальные данные, строят искомый треугольник.

Рассмотрим пример.

Задача 3

Построить треугольник по данным двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла.

Решение

На рисунке 198, а изображены два данных угла и данный отрезок. Требуется построить треугольник, у которого два угла соответственно равны двум данным углам, а биссектриса при вершине третьего угла равна данному отрезку.

Сначала построим какой-нибудь треугольник, подобный искомому. Для этого начертим произвольный отрезок A_1B_1 и построим треугольник A_1B_1C, у которого углы A_1 и B_1 соответственно равны данным углам (рис. 198, б).

Далее построим биссектрису угла C и отложим на ней отрезок CD, равный данному отрезку. Через точку D проведём прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает стороны угла C в некоторых точках A и B (см. рис. 198, б). Треугольник ABC искомый.

В самом деле, так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, и, следовательно, два угла треугольника ABC соответственно равны данным углам. По построению биссектриса CD треугольника ABC равна данному отрезку. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Очевидно, задача имеет решение, если сумма двух данных углов меньше $180°$. Так

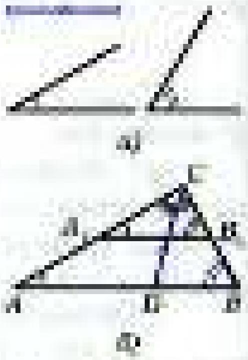


Рис. 198

так как отрезок A_1B_1 можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Все эти треугольники равны друг другу (объясните почему), поэтому задача имеет единственное решение.

Измерительные работы на местности

Свойства подобных треугольников могут быть использованы при проведении различных измерительных работ на местности. Мы рассмотрим две задачи: определение высоты предмета и расстояния до недоступной точки.

Определение высоты предмета. Предположим, что нам нужно определить высоту какого-нибудь предмета, например высоту телеграфного столба A_1C_1, изображённого на рисунке 199. Для этого поставим на некотором расстоянии от столба шест AC с вращающейся планкой и направим планку на верхнюю точку A_1 столба, как показано на рисунке. Отметим на поверхности земли точку B, в которой прямая A_1A пересекается с поверхностью земли. Прямоугольные треугольники A_1C_1B и ACB подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle C_1 = \angle C = 90°$, $\angle B$ — общий). Из подобия треугольников следует: $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}$, откуда

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC}.$$

Измерив расстояния BC_1 и BC и зная длину AC шеста, по полученной формуле определяем высоту A_1C_1 телеграфного столба. Если, например, $BC_1 = 6,3$ м, $BC = 2,1$ м, $AC = 1,7$ м, то $A_1C_1 = \frac{1,7 \cdot 6,3}{2,1} = 5,1$ м.

Определение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам нужно найти расстояние от пункта A до недоступного пункта B (рис. 200). Для этого на местности выбираем точку C, провешиваем отрезок AC и измеряем его.

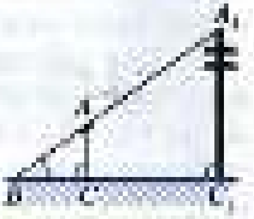


Рис. 199

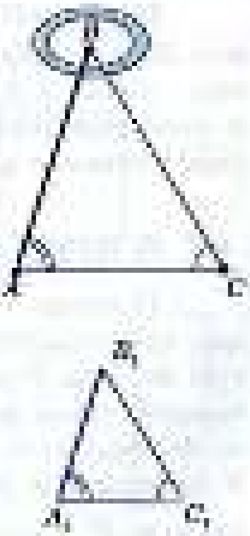


Рис. 200

Затем с помощью астролябии измерим углы A и C. На листе бумаги строим какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, и измеряем длины сторон A_1B_1 и A_1C_1 этого треугольника. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (по первому признаку подобия треугольников), то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, откуда получаем $AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}$. Эта формула позволяет по известным расстояниям AC, A_1C_1 и A_1B_1 найти расстояние AB.

Для упрощения вычислений удобно построить треугольник $A_1B_1C_1$ таким образом, чтобы $A_1C_1 : AC = 1 : 1000$. Например, если $AC = 130$ м, то расстояние A_1C_1 возьмём равным 130 мм. В этом случае $AB = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot A_1B_1 = 1000 \cdot A_1B_1$, поэтому, измерив расстояние A_1B_1 в миллиметрах, мы сразу получим расстояние AB в метрах.

Пример

Пусть $AC = 130$ м, $\angle A = 73°$, $\angle C = 58°$ (см. рис. 200). На бумаге строим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_1 = 73°$, $\angle C_1 = 58°$, $A_1C_1 = 130$ мм, и измеряем отрезок A_1B_1. Он равен 153 мм, поэтому искомое расстояние равно 153 м.

67 О подобии произвольных фигур

Понятие подобия можно ввести не только для треугольников, но и для произвольных фигур. Фигуры F и F_1 называются подобными, если каждой точке фигуры F можно сопоставить точку фигуры F_1 так, что для любых двух точек M и N фигуры F и сопоставленных им точек M_1 и N_1 фигуры F_1 выполняется равенство $\frac{MN}{M_1N_1} = k$, где

k — одно и то же положительное число для всех точек. При этом предполагается, что каждая точка фигуры F_1 оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры F. Число k называется **коэффициентом подобия фигур F и F_1**.

Сопоставление точек подобных фигур хорошо знакомо нам из повседневного опыта. Так, при проектировании киноленты на экран каждой точке изображения на кинокадре сопоставляется точка на экране, причём все расстояния увеличиваются в одинаковое число раз.

На рисунке 201 представлен способ построения фигуры F_1, подобной данной фигуре F. Каждой точке M фигуры F сопоставляется точка M_1 плоскости так, что точки M и M_1 лежат на луче с началом в некоторой фиксированной точке O, причём $OM = k \cdot OM_1$ (на рисунке 201 $k = \frac{1}{3}$). В результате такого сопоставления получается фигура F_1, подобная фигуре F. В этом случае фигуры F и F_1 называются **центрально-подобными**, а само описанное сопоставление называется **центральным подобием или гомотетией**.

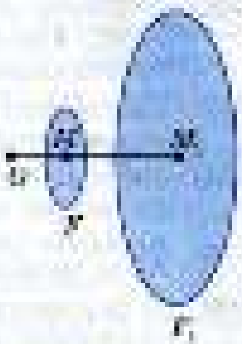


Рис. 201

Можно доказать, что для треугольников общее определение подобия равносильно определению, данному в п. 59.

Примерами подобных четырёхугольников являются любые два квадрата (рис. 202, *а*), а также два прямоугольника, у которых две смежные стороны одного пропорциональны двум смежным сторонам другого (рис. 202, *б*). Примерами подобных фигур произвольной формы являются две географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах, а также фотографии одного и того же предмета, сделанные в разных увеличениях.

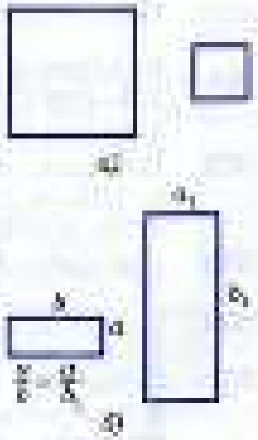


Рис. 202
Подобные прямоугольники

Замечание

В п. 60 мы доказали, что отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Из этого следует, что такое же утверждение справедливо для двух подобных многоугольников (чтобы доказать это, можно разбить многоугольники на треугольники).

Задачи

564 □ Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см и 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

565 □ Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его большую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

566 □ Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника APQ равен 21 см.

567 Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

568 Докажите, что четырёхугольник — ромб, если его вершинами являются середины сторон:
а) прямоугольника;
б) равнобедренной трапеции.

569 □ Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

570 □ Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM.

571 □ В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S.

В задачах 572—574 используются следующие обозначения для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CH = h$, $AH = b_c$, $HB = a_c$.

572 Найдите: а) h, a и b, если $b_c = 25$, $a_c = 16$; б) h, a и b, если $b_c = 36$, $a_c = 64$; в) a, c и a_c, если $b = 12$, $b_c = 6$; г) b, c и b_c, если $a = 8$, $a_c = 4$; д) h, b, a_c и b_c, если $a = 6$, $c = 9$.

573 Выразите a_c и b_c через a, b и c.

574 □ Докажите, что: а) $h = \frac{ab}{c}$; б) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$.

575 □ Катеты прямоугольного треугольника относятся как $3 : 4$, а гипотенуза равна 50 мм. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведённой из вершины прямого угла.

576 ☐ Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 11 см больше другого. Найдите гипотенузу, если катеты треугольника относятся как 6 : 5.

577 ☐ В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см и 13 см, проведена высота к его большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

578 Используя утверждение 2°, п. 65, докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C выполняется равенство $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Решение

Пусть CD — высота треугольника ABC (см. рис. 197). На основании утверждения 2°, п. 65, имеем $AC = \sqrt{AD \cdot AB}$, или $AC^2 = AD \cdot AB$. Аналогично $BC^2 = BD \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $AD + BD = AB$, получаем:

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + BD) \cdot AB = AB^2.$$

579 Для определения высоты столба A_1C_1, изображённого на рисунке 199, использован шест с вращающейся планкой. Чему равна высота столба, если $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 3{,}4$ м, $AC = 1{,}7$ м?

580 Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м, равна 2,5 м. Найдите высоту дерева.

581 Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 203. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

582 Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC, углы BAC и ACB. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Найдите AB, если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см.

583 На рисунке 204 показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Определите BB_1, если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

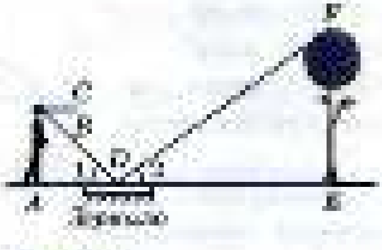


Рис. 203

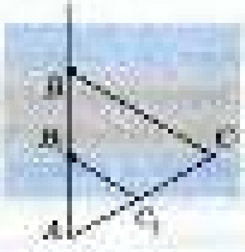


Рис. 204

Задачи на построение

584 ☐ Разделите данный отрезок AB на два отрезка AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2.

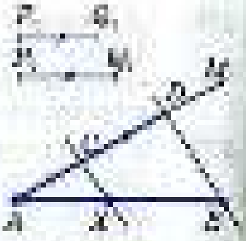


Рис. 205

Решение

Проведём какой-нибудь луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно отрезки AC и CD, равные отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 205). Затем проведём прямую BD и прямую, проходящую через точку C параллельно прямой BD. Она пересечёт отрезок AB в искомой точке X (см. задачу 556).

585 Начертите отрезок AB и разделите его в отношении: а) $2:5$; б) $3:7$; в) $4:3$.

586 Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведённой из вершины меньшего из данных углов.

587 Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла.

588 ☐ Постройте треугольник ABC по углу A и медиане AM, если известно, что $AB : AC = 2 : 3$.

589 Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB : AC = 2 : 1$.

590 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов, равному отношению двух данных отрезков.

§4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

66 Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 206). Катет BC этого треугольника является противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к этому углу.

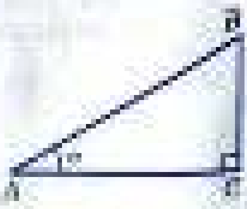


Рис. 206

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Синус, косинус и тангенс угла, равного α, обозначаются символами $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ (читается: «синус альфа», «косинус альфа» и «тангенс альфа»). На рисунке 200

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (2) получаем: $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}$. Сравнивая с формулой (3), находим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (4)$$

т. е. тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.

Докажем, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

В самом деле, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1 и равными острыми углами A и A_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Из этих равенств следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\sin A = \sin A_1$. Аналогично $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\cos A = \cos A_1$, и $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, т. е. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Докажем теперь справедливость равенства

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \qquad (5)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Равенство (5) называется **основным тригонометрическим тождеством**[1].

69 Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°

Найдём сначала значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° и 60°. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, у которого $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ (рис. 207). Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Но $\frac{BC}{AB} = \sin A = \sin 30°$. С другой стороны, $\frac{BC}{AB} = \cos B = \cos 60°$. Итак,

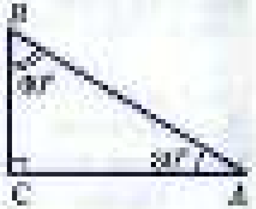


Рис. 207

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60° = \sqrt{1 - \cos^2 60°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (4) находим:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

[1] Слово «тригонометрия» в переводе с греческого языка означает «измерение треугольников».

Найдём теперь $\sin 45°$, $\cos 45°$ и $\mathrm{tg}\, 45°$. Для этого рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 206). В этом треугольнике $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2 = 2BC^2$, откуда $AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

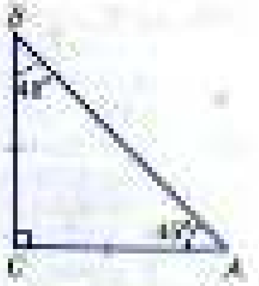


Рис. 206

Следовательно,

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\, 45° = \mathrm{tg}\, A = \frac{BC}{AC} = 1.$$

Составим таблицу значений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\mathrm{tg}\, \alpha$ для углов α, равных $30°$, $45°$, $60°$:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\, \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Задачи

591 Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если: а) $BC = 8$, $AB = 17$; б) $BC = 21$, $AC = 20$; в) $BC = 1$, $AC = 2$; г) $AC = 24$, $AB = 25$.

592 Постройте угол α, если: а) $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{3}{4}$; в) $\cos \alpha = 0{,}2$; г) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; д) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; е) $\sin \alpha = 0{,}4$.

593 Найдите: а) $\sin \alpha$ и $\mathrm{tg}\, \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin \alpha$ и $\mathrm{tg}\, \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; в) $\cos \alpha$ и $\mathrm{tg}\, \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos \alpha$ и $\mathrm{tg}\, \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

594 ☐ В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а противолежащий угол равен β. а) Выразите другой катет, противолежащий ему угол и гипотенузу через b и β. б) Найдите их значения, если $b = 10$ см, $\beta = 50°$.

595 ☐ В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а прилежащий к нему угол равен α. а) Выразите второй катет, прилежащий к нему острый угол и гипотенузу через b и α. б) Найдите их значения, если $b = 12$ см, $\alpha = 42°$.

596 В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Выразите второй острый угол и катеты через c и α и найдите их значения, если $c = 24$ см, а $\alpha = 35°$.

597 Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Выразите через a и b гипотенузу и тангенсы острых углов треугольника и найдите их значения при $a = 12$, $b = 15$.

598 Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если: а) боковая сторона равна b; б) основание равно a.

599 Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 2 см и 6 см, если угол при большем основании равен α.

600 Насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 60 м. Какова ширина насыпи в нижней ее части, если угол наклона откосов равен 60°, а высота насыпи равна 12 м (рис. 209)?

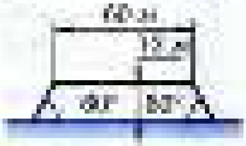


Рис. 209

601 ☐ Найдите углы ромба с диагоналями $2\sqrt{3}$ и 2.

602 ☐ Стороны прямоугольника равны 3 см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

603 ☐ В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 12 см, а угол BAD равен 47°50′. Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ BD перпендикулярна к стороне AB.

Вопросы для повторения к главе VII

1. Что называется отношением двух отрезков?
2. В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?
3. Дайте определение подобных треугольников.
4. Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных треугольников.
5. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак подобия треугольников.
6. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак подобия треугольников.

7 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак подобия треугольников.

8 Какой отрезок называется средней линией треугольника? Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

9 Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

10 Сформулируйте и докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.

11 Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

12 Приведите пример решения задачи на построение методом подобия.

13 Расскажите, как определить на местности высоту предмета и расстояние до недоступной точки.

14 Объясните, какие две фигуры называются подобными. Что такое коэффициент подобия фигур?

15 Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

16 Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

17 Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?

18 Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°? Ответ обоснуйте.

Дополнительные задачи

604 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CA = 10$ см. Наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7,5 см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

605 Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит её на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2 = a \cdot b$, где a и b — основания трапеции.

606 Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O. Найдите отношение $OK : ON$, если $MN = 5$ см, $NP = 3$ см, $MP = 7$ см.

607 Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне как 4 : 3, а высота, проведённая к основанию,

равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

608 На продолжении боковой стороны OB равнобедренного треугольника AOB с основанием AB взята точка C так, что точка B лежит между точками O и C. Отрезок AC пересекает биссектрису угла AOB в точке M. Докажите, что $AM < MC$.

609 На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

610 Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит сторону AC в отношении $2 : 7$, считая от вершины A. Найдите стороны отсечённого треугольника, если $AB = 10$ см, $BC = 18$ см, $CA = 21,6$ см.

611 Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный стороне BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC.

612 Два шеста AB и CD разной длины a и b установлены вертикально на некотором расстоянии друг от друга так, как показано на рисунке 210. Концы A и D, B и C соединены верёвками, которые пересекаются в точке O. По данным рисунка докажите, что: а) $\frac{y}{d} = \frac{x}{b}$ и $\frac{z}{d} = \frac{x}{a}$; б) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$. Найдите x и докажите, что x не зависит от расстояния d между шестами AB и CD.

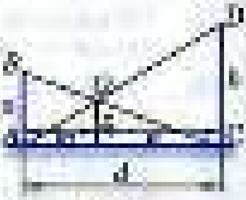


Рис. 210

613 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если: а) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$, где BM и B_1M_1 — медианы треугольников; б) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

614 Диагонали прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A взаимно перпендикулярны. Основание AB равно 6 см, а боковая сторона AD равна 4 см. Найдите DC, DB и CB.

615* Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен её основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b.

616 Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

617 Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

618 Точки M и N являются соответственно серединами сторон CD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

619 ☐ Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

620 В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

621 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC сумма оснований равна b, диагональ AC равна a, $\angle ACB = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

622 ☐ На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK = \frac{1}{4} KD$. Диагональ AC и отрезок BK пересекаются в точке P. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника APK равна 1 см^2.

623 ☐ В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle ACD = 90°$, $BC = 4$ см, $AD = 16$ см. Найдите углы C и D трапеции.

624 Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть треугольников, площади которых попарно равны.

625 ☐ Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ в 5 раз больше основания BC. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M, площадь треугольника AMH равна 4 см^2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

626* Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

Задачи на построение

627 Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, площадь которого в два раза больше площади треугольника ABC.

628 Даны три отрезка, длины которых соответственно равны a, b и c. Постройте отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

629 ☐ Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

630 ☐ Постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам.

Глава VIII

Окружность

В этой главе мы вернёмся к одной из основных геометрических фигур — к окружности. Будут доказаны различные теоремы, связанные с окружностью, в том числе теоремы об окружностях, вписанных в треугольник, четырёхугольник, и окружностях, описанных около этих фигур. Кроме того, будут доказаны три утверждения о замечательных точках треугольника — точке пересечения биссектрис треугольника, точке пересечения его высот и точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Первые два утверждения были сформулированы ещё в 7 классе, и вот теперь мы сможем привести их доказательство.

§ 1 Касательная к окружности

70 Взаимное расположение прямой и окружности

Выясним, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения. Ясно, что если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой.

Пусть прямая p не проходит через центр O окружности радиуса r. Проведём перпендикуляр OH к прямой p и обозначим буквой d длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от центра данной окружности до прямой (рис. 211).

Исследуем взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между d и r. Возможны три случая.

1) $d < r$. На прямой p от точки H отложим два отрезка HA и HB, длины которых равны $\sqrt{r^2 - d^2}$ (рис. 211, а). По теореме Пифагора

$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r,$$

$$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r.$$

Следовательно, точки A и B лежат на окружности и, значит, являются общими точками прямой p и данной окружности.

Докажем, что прямая p и данная окружность не имеют других общих точек. Предположим, что они имеют ещё одну общую точку C. Тогда медиана OD равнобедренного треугольника OAC, проведённая к основанию AC, является высотой этого треугольника, поэтому $OD \perp p$. Отрезки OD и OH не совпадают, так как середина D отрезка AC не совпадает с точкой H — серединой отрезка AB. Мы получили, что из точки O проведены два перпендикуляра (отрезки OH и OD) к прямой p, что невозможно.

Итак, если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($d < r$), то прямая и окружность имеют две общие точки. В этом случае прямая называется *секущей* по отношению к окружности.

2) $d = r$. В этом случае $OH = r$, т. е. точка H лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности (рис. 211, б). Прямая p и окружность не имеют других общих точек, так как для любой точки M прямой p, отличной от точки H, $OM > OH = r$ (наклонная OM больше перпендикуляра OH), и, следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

3) $d > r$. В этом случае $OH > r$, поэтому для любой точки M прямой p $OM \geq OH > r$ (рис. 211, в). Следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Рис. 211

71 Касательная к окружности

Мы доказали, что прямая и окружность могут иметь одну или две общие точки и могут не иметь ни одной общей точки.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности. На рисунке 212 прямая p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания.

Докажем теорему о свойстве касательной к окружности.

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

Пусть p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания (см. рис. 212). Докажем, что касательная p перпендикулярна к радиусу OA.

Рис. 212

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к прямой p. Так как перпендикуляр, проведённый из точки O к прямой p, меньше наклонной OA, то расстояние от центра O окружности до прямой p меньше радиуса. Следовательно, прямая p и окружность имеют две общие точки. Но это противоречит условию: прямая p — касательная.

Таким образом, прямая p перпендикулярна к радиусу OA. Теорема доказана.

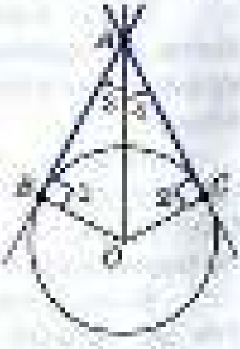


Рис. 213

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 213). Отрезки AB и AC назовём отрезками касательных, проведёнными из точки A. Они обладают следующим свойством:

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 218. По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Следовательно, $AB = AC$ и $\angle 3 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему, обратную теореме о свойстве касательной (признак касательной).

Теорема

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведённым из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности. **Теорема доказана.**

На этой теореме основано решение задач на построение касательной. Решим одну из таких задач.

Задача

Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

Решение

Проведём прямую OA, а затем построим прямую p, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой OA. По признаку касательной прямая p является искомой касательной.

Задачи

631 Пусть d — расстояние от центра окружности радиуса r до прямой p. Каково взаимное расположение прямой p и окружности, если: а) $r = 16$ см, $d = 12$ см; б) $r = 5$ см, $d = 4{,}2$ см; в) $r = 7{,}2$ дм, $d = 3{,}7$ дм; г) $r = 8$ см, $d = 1{,}2$ дм; д) $r = 5$ см, $d = 50$ мм?

632 ❑ Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A, является секущей по отношению к данной окружности.

633 Даны квадрат $OABC$, сторона которого равна 6 см, и окружность с центром в точке O радиуса 5 см. Какие из прямых OA, AB, BC и AC являются секущими по отношению к этой окружности?

634 ❑ Радиус OM окружности с центром O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведённая через точку M, параллельна хорде AB.

635 ❑ Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

636 ❑ Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ACB.

637 ❑ Угол между диаметром AB и хордой AC равен $30°$. Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

638 ❑ Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $OA = 2$ см, а $r = 1{,}5$ см.

639 ❑ Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $\angle AOB = 60°$, а $r = 12$ см.

640 Даны окружность с центром O радиуса 4,5 см и точка A. Через точку A проведены две касательные к окружности. Найдите угол между ними, если $OA = 9$ см.

641 ❑ Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведёнными из точки A. Найдите угол BAC, если середина отрезка AO лежит на окружности.

642 ❑ На рисунке 213 $OB = 3$ см, $OA = 6$ см. Найдите AB, AC, $\angle 3$ и $\angle 4$.

643 ❑ Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите BC, если $\angle OAB = 30°$, $AB = 5$ см.

644 ❑ Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B. Точка C симметрична точке O относительно точки B. Докажите, что $\angle AMC = 3\angle BMC$.

645 Из концов диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не перпендику-

кулярно к диаметру AB. Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1.

646 В треугольнике ABC угол B прямой. Докажите, что: а) прямая BC является касательной к окружности с центром A радиуса AB; б) прямая AB является касательной к окружности с центром C радиуса CB; в) прямая AC не является касательной к окружностям с центром B и радиусами BA и BC.

647 Отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 3 см. Является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) $OA = 5$ см, $AH = 4$ см; б) $\angle HAO = 45°$, $OA = 4$ см; в) $\angle HAO = 30°$, $OA = 6$ см?

648 □ Постройте касательную к окружности с центром O:
а) параллельную данной прямой;
б) перпендикулярную к данной прямой.

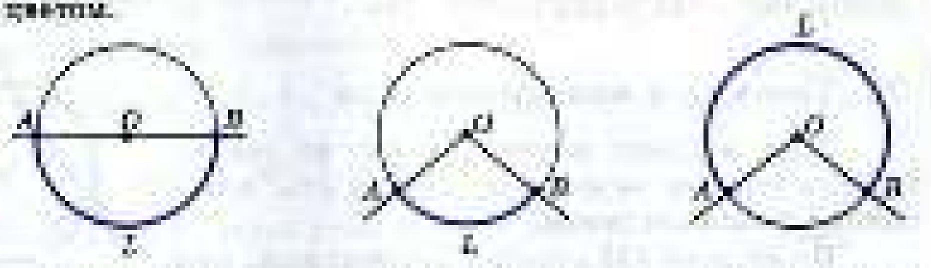
§2 Центральные и вписанные углы

72 Градусная мера дуги окружности

Отметим на окружности две точки A и B. Они разделяют окружность на две дуги. Чтобы различать эти дуги, на каждой из них отмечают промежуточную точку, например L и M (рис. 214). Обозначают дуги так: $\smile ALB$ и $\smile AMB$. Иногда используется обозначение без промежуточной точки: $\smile AB$ (когда ясно, о какой из двух дуг идёт речь).

Рис. 214

Дуга называется полуокружностью, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности. На рисунке 215, а изображены две полуокружности, одна из которых выделена цветом.



$\smile ALB = 180°$ | $\smile ALB = \angle AOB$ | $\smile ALB = 360° - \angle AOB$

Рис. 215 а) б) в)

Угол с вершиной в центре окружности называется её центральным углом. Пусть стороны центрального угла окружности с центром O пересекают её в точках A и B. Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B (рис. 215). Если $\angle AOB$ развёрнутый, то ему соответствуют две полуокружности (рис. 215, *а*). Если $\angle AOB$ неразвёрнутый, то говорят, что дуга AB, расположенная внутри этого угла, меньше полуокружности. На рисунке 215, *б* эта дуга выделена цветом. Про другую дугу с концами A и B говорят, что она больше полуокружности (дуга ALB на рисунке 215, *в*).

Дугу окружности можно измерять в градусах. **Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то её градусная мера считается равной градусной мере центрального угла AOB** (см. рис. 215, *а*, *б*). **Если же дуга AB больше полуокружности, то её градусная мера считается равной $360° - \angle AOB$** (см. рис. 215, *в*).

Отсюда следует, что сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна $360°$.

Рис. 216

Градусная мера дуги AB (дуги ALB), как и сама дуга, обозначается символом $\smile AB$ ($\smile ALB$). На рисунке 216 градусная мера дуги CAB равна $145°$. Обычно говорят кратко: «Дуга CAB равна $145°$» и пишут: $\smile CAB = 145°$. На этом же рисунке $\smile ADB = 360° - 115° = 245°$, $\smile CDB = 360° - 145° = 215°$, $\smile DB = 180°$.

73 Теорема о вписанном угле

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

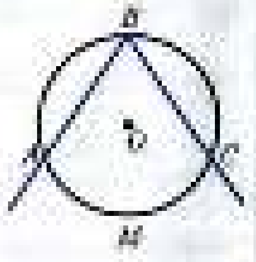


Рис. 217

На рисунке 217 угол ABC вписанный, дуга AMC расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC опирадуга на дугу AMC. Докажем теорему о вписанном угле.

Теорема

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство

Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC (рис. 218). Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

1) *Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC*, например со стороной BC (рис. 218, *а*). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то

$$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1.$$

Отсюда следует, что

$$2\angle 1 = \smile AC \text{ или } \angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC.$$

2) *Луч BO делит угол ABC на два угла.* В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 218, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\smile AD$ и $\smile DC$. По доказанному в п. 1) $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$. Складывая эти равенства, получаем:

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC,$$

$$\text{или } \angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

3) *Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла.* Для этого случая, пользуясь рисунком 218, *в*, проведите доказательство самостоятельно.

Рис. 218

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 219).

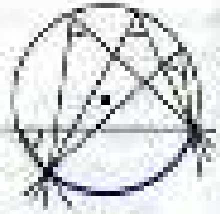


Рис. 219

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой (рис. 220).

Используя следствие 1, докажем теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.

Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Рис. 220

Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E (рис. 221). Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. **Теорема доказана.**

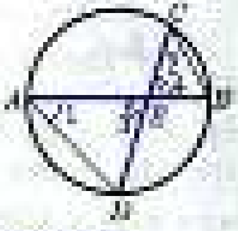


Рис. 221

Задачи

649 Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A. Постройте хорду AB так, чтобы: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$; г) $\angle AOB = 180°$.

650 Радиус окружности с центром O равен 16. Найдите хорду AB, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 180°$.

651 Хорды AB и CD окружности с центром O равны.
а) Докажите, что две дуги с концами A и B соответственно равны двум дугам с концами C и D.
б) Найдите дуги с концами C и D, если $\angle AOB = 112°$.

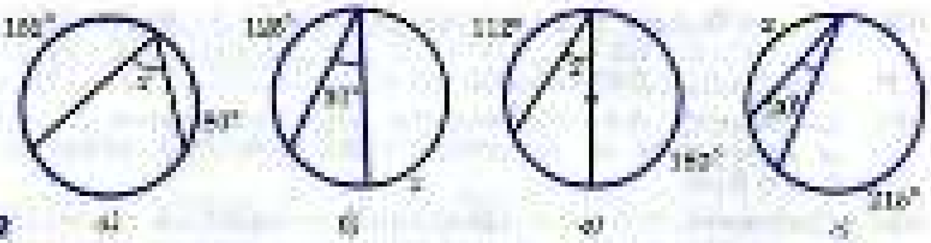


Рис. 232

652 ❑ На полуокружности AB взяты точки C и D так, что $\smile AC = 37°$, $\smile BD = 23°$. Найдите хорду CD, если радиус окружности равен 15 см.

653 Найдите вписанный угол ABC, если дуга AC, на которую он опирается, равна: а) 48°; б) 57°; в) 90°; г) 124°; д) 180°.

654 ❑ По данным рисунка 232 найдите x.

655 ❑ Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

656 ❑ Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC — дугу в 43°. Найдите угол BAC.

657 Точки A и B разделяют окружность на две дуги, меньшая из которых равна 140°, а бо́льшая точкой M делится в отношении 6 : 5, считая от точки A. Найдите угол BAM.

658 Через точку A к данной окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AD, проходящая через центр O (D — точка на окружности, O лежит между A и D). Найдите $\angle BAD$ и $\angle ADB$, если $\smile BD = 110°20'$.

659 Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключённых между параллельными хордами, равны.

660 ❑ Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32°. Бо́льшая дуга окружности, заключённая между сторонами этого угла, равна 100°. Найдите меньшую дугу.

661 ❑ Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведёнными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключённые между секущими, равны 140° и 52°.

662 ❑ Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Найдите угол BEC, если $\smile AD = 54°$, $\smile BC = 70°$.

663 Отрезок AC — диаметр окружности, AB — хорда, MA — касательная, угол MAB острый. Докажите, что $\angle MAB = \angle ACB$.

664 Прямая AM — касательная к окружности, AB — хорда этой окружности. Докажите, что угол MAB измеряется половиной дуги AB, расположенной внутри угла MAB.

665 Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Докажите, что если AB — диаметр окружности, то $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$.

666 Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если: а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2,5$; б) $AE = 16$, $BE = 9$, $CE = ED$; в) $AE = 0,2$, $BE = 0,5$, $CE = 0,4$.

667 ☐ Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает её в точке C. Найдите BB_1, если $AC = 4$ см, $CA_1 = 8$ см.

668 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

669 Пользуясь утверждением, сформулированным в задаче **668**, постройте отрезок, равный среднему пропорциональному для двух данных отрезков.

670 Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках P и Q. Докажите, что $AB^2 = AP \cdot AQ$.

671 ☐ Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Найдите CD, если: а) $AB = 4$ см, $AC = 2$ см; б) $AB = 5$ см, $AD = 10$ см.

672 Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках B_1 и C_1, а другая — в точках B_2 и C_2. Докажите, что $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.

673 ☐ К данной окружности постройте касательную, проходящую через данную точку вне окружности.

Решение

Пусть даны окружность с центром O и точка A вне этой окружности. Допустим, что задача решена и AB — искомая касательная (рис. 228). Так как прямая AB перпендикулярна к радиусу OB, то решение задачи сводится к построению точки B окружности, для которой $\angle ABO$ прямой. Эту точку можно построить следующим образом: проводим отрезок OA и строим его середину O_1. Затем проводим окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A. Эта окружность пересекает данную окружность в двух точках: B и B_1. Прямые AB и AB_1 — искомые касательные, так как $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$. Действительно, углы ABO и AB_1O, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на полуокружность, поэтому они прямые. Очевидно, задача имеет два решения.

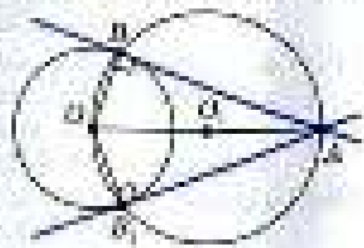


Рис. 228

74 Свойства биссектрисы угла

Докажем сначала теорему о биссектрисе угла.

Теорема

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон[1].
Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

Доказательство

1) Возьмём произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC и докажем, что $MK = ML$ (рис. 224). Рассмотрим прямоугольные треугольники AMK и AML. Они равны по гипотенузе и острому углу (AM — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ по условию). Следовательно, $MK = ML$.

2) Пусть точка M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC. Докажем, что луч AM — биссектриса угла BAC (см. рис. 224). Проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC. Прямоугольные треугольники AMK и AML равны по гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MK = ML$ по условию). Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но это и означает, что луч AM — биссектриса угла BAC. **Теорема доказана.**

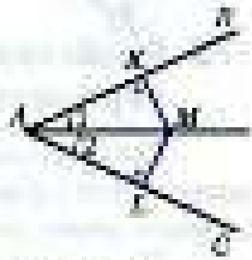


Рис. 224

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, лежащих внутри неразвёрнутого угла и равноудалённых от сторон угла, является биссектриса этого угла.

[1] То есть равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

Следствие 2

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

В самом деле, обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC и проведём из этой точки перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к прямым AB, BC и CA (рис. 225). По доказанной теореме $OK = OM$ и $OK = OL$. Поэтому $OM = OL$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла. Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

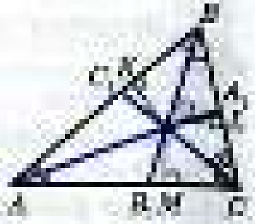


Рис. 225

75 Свойства серединного перпендикуляра к отрезку

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

На рисунке 226 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

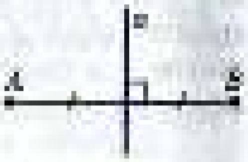


Рис. 226

Докажем теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

Теорема

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Обратно: каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Доказательство

Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O — середина этого отрезка (рис. 227, а).

1) Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$. Если точ-

ка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, так как O — середина отрезка AB. Пусть M и O — различные точки. Прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам ($OA = OB$, OM — общий катет), поэтому $AM = BM$.

2) Рассмотрим произвольную точку N, равноудалённую от концов отрезка AB, и докажем, что точка N лежит на прямой m. Если N — точка прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB и потому лежит на прямой m. Если же точка N не лежит на прямой AB, то треугольник ANB равнобедренный, так как $AN = BN$ (рис. 227, б). Отрезок NO — медиана этого треугольника, а значит, и высота. Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому прямые ON и m совпадают, т. е. N — точка прямой m. Теорема доказана.

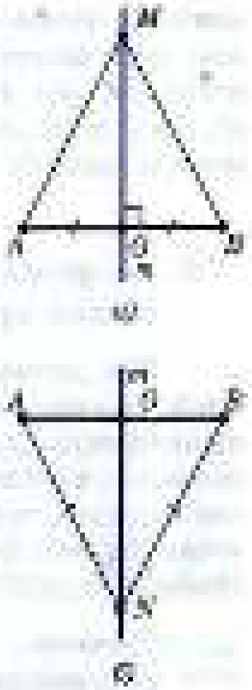


Рис. 227

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Следствие 2

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 228). Эти прямые пересекаются в некоторой точке O. В самом деле, если предположить противное, т. е. что $m \parallel n$, то прямая BA, будучи перпендикулярной к прямой m, была бы перпендикулярна и к параллельной ей прямой n, а тогда через точку B проходили бы две прямые BA и BC, перпендикулярные к прямой n, что невозможно.

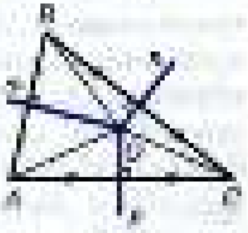


Рис. 228

По доказанной теореме $OB = OA$ и $OB = OC$. Поэтому $OA = OC$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O.

76 Теорема о пересечении высот треугольника

Мы доказали, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Ранее было доказано, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (п. 64). Оказывается, аналогичным свойством обладают и высоты треугольника.

Теорема

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 229).

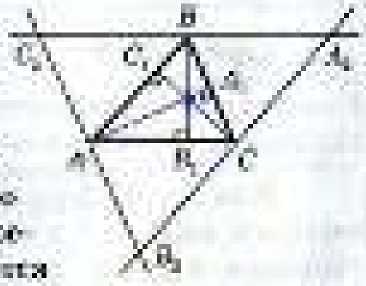


Рис. 229

Проведём через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$. Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Таким образом, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно, ся пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называются замечательными точками треугольника.

Задачи

674 Из точки M биссектрисы неразвёрнутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

675 Стороны угла O касаются каждой из двух окружностей, имеющих общую касательную в точке A. Докажите, что центры этих окружностей лежат на прямой OA.

676 □ Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r. Найдите: а) OA, если $r = 5$ см, $\angle A = 60°$; б) r, если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90°$.

677 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что точка O является центром окружности, касающейся прямых AB, BC, AC.

678 □ Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите углы ACM и BCM, если: а) $\angle AMB = 136°$; б) $\angle AMB = 111°$.

679 □ Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите: а) AD и CD, если $BD = 5$ см, $AC = 8,5$ см; б) AC, если $BD = 11,4$ см, $AD = 3,2$ см.

680 Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC. Докажите, что: а) точка D — середина стороны BC; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

681 □ Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E. Найдите основание AC, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB = 18$ см.

682 Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

683 Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.

684 Биссектрисы углов при основании AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что прямая CM перпендикулярна к прямой AB.

685 Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведённые к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

686 ☐ Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами в точках A и B радиуса AB (рис. 230). Эти окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2. Отрезки AM_1, AM_2, BM_1, BM_2 равны друг другу как радиусы этих окружностей.

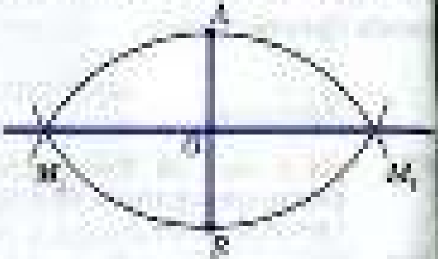


Рис. 230

Проведём прямую M_1M_2. Она является искомым серединным перпендикуляром к отрезку AB. В самом деле, точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB, поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Значит, прямая M_1M_2 и есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

687 ☐ Даны прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. На прямой a постройте точку M, равноудалённую от точек A и B.

688 ☐ Даны угол и отрезок. Постройте точку, лежащую внутри данного угла, равноудалённую от его сторон и равноудалённую от концов данного отрезка.

§4 Вписанная и описанная окружности

77 Вписанная окружность

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник — **описанным** около этой окружности. На рисунке 231 четырёхугольник $EFMN$ описан около окружности с центром O, а четырёхугольник $DKMN$ не является описанным около этой окружности, так как сторона DK не касается окружности. На ри-

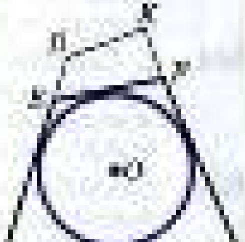


Рис. 231

сунке 232 треугольник ABC описан около окружности с центром O.

Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведём из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA (см. рис. 232). Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK = OL = OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. Теорема доказана.

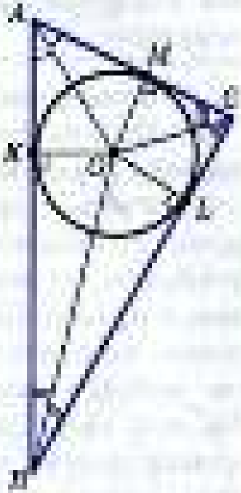


Рис. 232

Замечание 1

Отметим, что в треугольник можно вписать только одну окружность.

В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудалён от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Замечание 2

Обратимся к рисунку 232. Мы видим, что треугольник ABC составлен из трёх треугольников: ABO, BCO и CAO. Если в каждом из этих треугольников принять за основание сторону треугольника ABC, то высотой окажется радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC. Поэтому площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CA \cdot r = \frac{AB + BC + CA}{2} \cdot r.$$

Таким образом,

площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

Замечание 3

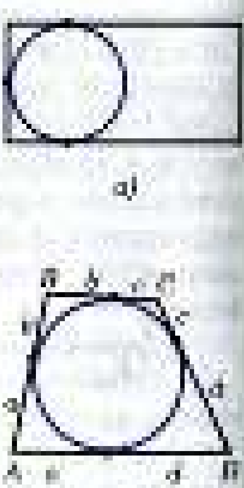
В отличие от треугольника не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.

Рассмотрим, например, прямоугольник, у которого смежные стороны не равны, т. е. прямоугольник, не являющийся квадратом. Ясно, что в такой прямоугольник можно «поместить» окружность, касающуюся трёх его сторон (рис. 233, *а*), но нельзя «поместить» окружность так, чтобы она касалась всех четырёх его сторон, т. е. нельзя вписать окружность. Если же в четырёхугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным свойством:

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Это свойство легко установить, используя рисунок 233, *б*, на котором одними и теми же буквами обозначены равные отрезки касательных. В самом деле, $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + AD = a + b + c + d$, поэтому $AB + CD = BC + AD$. Оказывается, верно и обратное утверждение:

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность (см. задачу 724).



а)
б)
Рис. 233

78 Описанная окружность

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник — **вписанным** в эту окружность. На рисунке 234 четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, а четырёхугольник $AECD$ не является вписанным в эту окружность, так как вершина E не лежит на окружности. Треугольник ABC на рисунке 235 является вписанным в окружность с центром O.

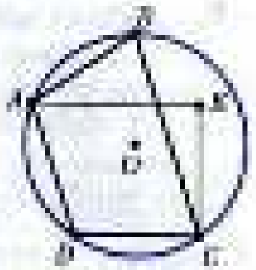


Рис. 234

Докажем теорему об окружности, описанной около треугольника.

Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведём отрезки OA, OB и OC (рис. 235). Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC. **Теорема доказана.**

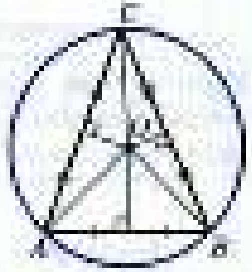


Рис. 235

Замечание 1

Отметим, что около треугольника можно описать только одну окружность.

В самом деле, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудалён от его вершин и поэтому совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Замечание 2

В отличие от треугольника около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.

Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом (объясните почему). Если же около четырёхугольника можно описать окружность, то его углы обладают следующим замечательным свойством:

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Это свойство легко установить, если обратиться к рисунку 236 и воспользоваться теоремой о вписанном угле. В самом деле,

$$\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD, \quad \angle C = \frac{1}{2} \smile BAD,$$

откуда следует

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

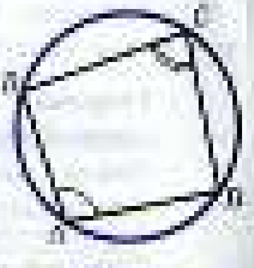


Рис. 236

Оказывается, верно и обратное:

Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность (см. задачу 729).

Задачи

689 В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

690 Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведённую к основанию, в отношении 12 : 5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

691 Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

692 В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и R. Найдите AP, PB, BQ, QC, CR, RA, если $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $CA = 5$ см.

693 ☐ В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

694 Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c, а сумма катетов равна m.

695 ☐ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырёхугольника.

696 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

697 Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

698 ☐ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырёхугольника.

699 ☐ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 10 см, а его площадь — 12 см². Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырёхугольник.

700 Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

701 ☐ Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. В каждый из них впишите окружность.

702 ☐ В окружность вписан треугольник ABC так, что AB — диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если:
а) $\smile BC = 134°$; б) $\smile AC = 70°$.

703 В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найдите углы треугольника, если $\smile BC = 102°$.

704 Окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника. а) Докажите, что точка O — середина гипотенузы. б) Найдите стороны треугольника, если диаметр окружности равен d, а один из острых углов треугольника равен α.

705 ☐ Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см; б) $AC = 18$ см, $\angle B = 30°$.

706 ☐ Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

707 ☐ Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, боковая сторона треугольника равна 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

708 Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

709 Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.

710 Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

711 ❑ Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и равносторонний. Для каждого из них постройте описанную окружность.

Вопросы для повторения к главе VIII

1 Исследуйте взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом окружности и расстоянием от её центра до прямой. Сформулируйте полученные выводы.

2 Какая прямая называется секущей по отношению к окружности?

3 Какая прямая называется касательной к окружности? Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?

4 Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.

5 Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

6 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.

7 Объясните, как через данную точку окружности провести касательную к этой окружности.

8 Какой угол называется центральным углом окружности?

9 Объясните, какая дуга называется полуокружностью, какая дуга меньше полуокружности, а какая больше полуокружности.

10 Как определяется градусная мера дуги? Как она обозначается?

11 Какой угол называется вписанным? Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.

12 Докажите, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

13 Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

14 Сформулируйте и докажите теорему об отрезках пересекающихся хорд.

15 Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе угла.

16 Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

17 Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?

18 Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

19 Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

20 Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника.

21 Какая окружность называется вписанной в многоугольник? Какой многоугольник называется описанным около окружности?

22 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в треугольник. Сколько окружностей можно вписать в данный треугольник?

23 Каким свойством обладают стороны четырёхугольника, описанного около окружности?

24 Какая окружность называется описанной около многоугольника? Какой многоугольник называется вписанным в окружность?

25 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника. Сколько окружностей можно описать около данного треугольника?

26 Каким свойством обладают углы четырёхугольника, вписанного в окружность?

Дополнительные задачи

712 Докажите, что касательные, проведённые через концы хорды, не являющейся диаметром окружности, пересекаются.

713 Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром O, B и C — точки касания. Через произвольную точку X, взятую на дуге BC, проведена касательная к этой окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Докажите, что периметр треугольника AMN и величина угла MON не зависят от выбора точки X на дуге BC.

714* Две окружности имеют общую точку M и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой — в точке B. Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

715 Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1. Докажите, что градусные меры дуг AB и AB_1, меньших полуокружности, равны.

716 Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\smile AB = \smile CD$, то $AB = CD$.

717 Отрезок AB является диаметром окружности, а хорды BC и AD параллельны. Докажите, что хорда CD является диаметром.

718 По данным рисунка 237 докажите, что

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB).$$

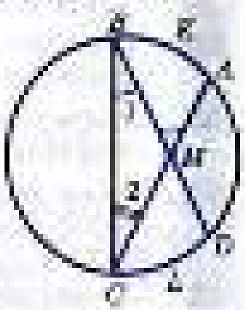


Рис. 237

Решение

Проведём хорду BC. Так как $\angle AMB$ — внешний угол треугольника BMC, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile CLD$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile AKB$, поэтому $\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB)$.

719 Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие. Докажите, что угол между ними измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри угла.

720 Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне? Ответ обоснуйте.

721 Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

722 Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r. Известно, что $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$. Найдите стороны четырёхугольника, если его площадь равна S.

723 Докажите, что если прямые, содержащие основания трапеции, касаются окружности, то прямая, проходящая через середины боковых сторон трапеции, проходит через центр этой окружности.

724 Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Решение

Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$

$$AB + CD = BC + AD. \quad (1)$$

Точка O пересечения биссектрис углов A и B равноудалена от сторон AD, AB и BC, поэтому можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трёх сторон (рис. 238, *а*). Докажем, что эта окружность касается также стороны CD и, значит, является вписанной в четырёхугольник $ABCD$.

Предположим, что это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай (рис. 238, б). Проведём касательную $C'D'$, параллельную стороне CD (C' и D' — точки пересечения касательной со сторонами BC и AD). Так как $ABC'D'$ — описанный четырёхугольник, то по свойству его сторон

$$AB + C'D' = BC' + AD'. \qquad (2)$$

Но $BC' = BC - C'C$, $AD' = AD - D'D$, поэтому из равенства (2) получаем:

$$C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB.$$

Правая часть этого равенства в силу (1) равна CD. Таким образом, приходим к равенству

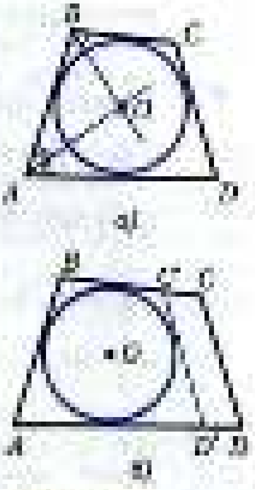


Рис. 238

$$C'D' + C'C + D'D = CD,$$

т. е. в четырёхугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трёх других сторон. Но этого не может быть, и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать, что прямая CD не может быть секущей окружности. Следовательно, окружность касается стороны CD, что и требовалось доказать.

725 Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

726 Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

727 В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O_1 и около него описана окружность с центром O_2. Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

728 Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат.

729* Докажите, что если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Решение

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$

$$\angle A + \angle C = 180°. \qquad (1)$$

Проведём окружность через три вершины четырёхугольника: A, B и D (рис. 239, а) — и докажем, что она проходит также через вершину C, т. е. является описанной около четырёх-

четырёхугольника $ABCD$. Предположим, что это не так. Тогда вершина C лежит либо внутри круга, либо вне его. Рассмотрим первый случай (рис. 239, а). В этом случае $\angle C = \frac{1}{2}(\smile DAB + \smile EF)$ (см. задачу 718), и, следовательно, $\angle C > \frac{1}{2}\smile DAB$. Так как $\angle A = \frac{1}{2}\smile BED$, то $\angle A + \angle C > \frac{1}{2}(\smile BED + \smile DAB) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$.

Итак, мы получили, что $\angle A + \angle C > 180°$. Но это противоречит условию (1), и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать (опираясь на задачу 719), что вершина C не может лежать вне круга. Следовательно, вершина C лежит на окружности, что и требовалось доказать.

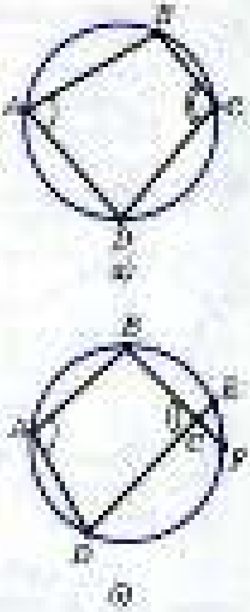


Рис. 239

730 Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла AOB и пересекающиеся в точке C внутри угла. Докажите, что около четырёхугольника $ACBO$ можно описать окружность.

731 Докажите, что около выпуклого четырёхугольника, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

732 В прямоугольном треугольнике ABC из точки M стороны AC проведён перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Докажите, что углы MHC и MBC равны.

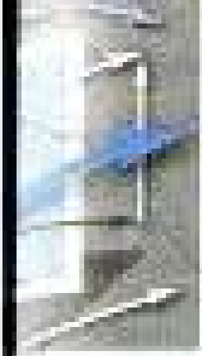
733 ☐ Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10 см.

734 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм — квадрат.

735 В трапецию с основаниями a и b можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

736 ☐ Дана прямая a, точка A, лежащая на этой прямой, и точка B, не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A.

737 Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.



Глава IX

Векторы

Эта глава посвящена разработке векторного аппарата геометрии. С помощью векторов можно доказывать теоремы и решать геометрические задачи. Примеры такого применения векторов приведены в данной главе. Но изучение векторов полезно ещё и потому, что они широко используются в физике для описания различных физических величин, таких, например, как скорость, ускорение, сила.

§1 Понятие вектора

79 Понятие вектора

Многие физические величины, например сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются **векторными величинами** (или коротко **векторами**).

Рис. 240

Рассмотрим пример. Пусть на тело действует сила в 8 Н. На рисунке силу изображают отрезком со стрелкой (рис. 240). Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует в выбранном масштабе числовому значению силы. Так, на рисунке 240 сила в 1 Н изображена отрезком длиной 0,6 см, поэтому сила в 8 Н изображена отрезком длиной 4,8 см.

Отвлекаясь от конкретных свойств физических векторных величин, мы приходим к геометрическому понятию вектора.

Рассмотрим произвольный отрезок. Его концы называются также граничными точками отрезка.

Рис. 241

На отрезке можно указать два направления: от одной граничной точки к другой и наоборот (рис. 241).

Чтобы выбрать одно из этих направлений, одну граничную точку отрезка назовём началом отрезка, а другую — концом отрезка и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

Определение

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется направленным отрезком или **вектором**.

На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$. Первая буква обозначает начало вектора, вторая — конец (рис. 242). На рисунке 243, а изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$; точки A, C, E — начала этих векторов, а B, D, F — их концы. Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 243, б).

Рис. 242

Для дальнейшего целесообразно условиться, что любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется **нулевым**. Начало нулевого вектора совпадает с его концом. На рисунке такой вектор изображается одной точкой. Если, например, точка, изображающая нулевой вектор, обозначена буквой M, то данный нулевой вектор можно обозначить так: $\overrightarrow{MM}$ (рис. 243, а). Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$. На рисунке 243 векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ненулевые, а вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой.

Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Длины векторов, изображённых на рисунках 243, а и 243, б, таковы: $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$, $|\overrightarrow{EF}| = 2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}| = 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{18}$, $|\vec{b}| = 4{,}5$, $|\vec{c}| = 3$ (каждая клетка на рисунке 243 имеет сторону, равную единице измерения отрезков).

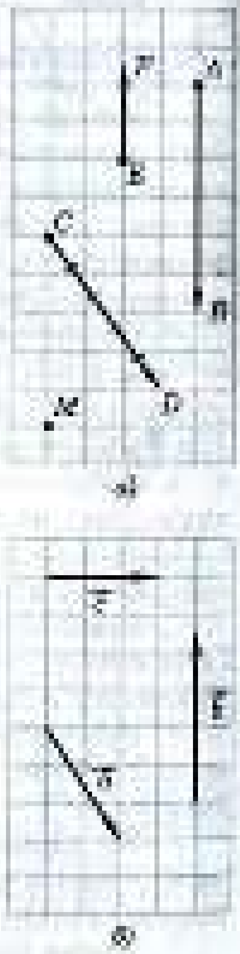


Рис. 243

80 Равенство векторов

Прежде чем дать определение равных векторов, обратимся к примеру. Рассмотрим движение тела, при котором все его точки движутся с одной и той же скоростью и в одном и том же направлении.

Скорость каждой точки M тела является векторной величиной, поэтому её можно изобразить направленным отрезком, начало которого совпадает с точкой M (рис. 244). Так как все точки тела движутся с одной и той же скоростью, то все направленные отрезки, изображающие скорости этих точек, имеют одно и то же направление и длины их равны.

Рис. 244

Этот пример подсказывает нам, как определить равенство векторов.

Предварительно введём понятие коллинеарных векторов.

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

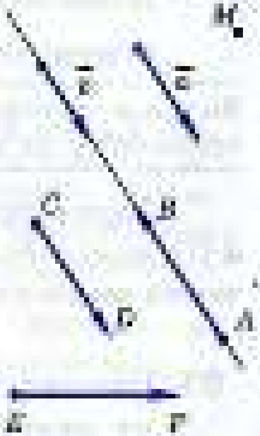


Рис. 245

На рисунке 245 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ (вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой) коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$, а также $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ не коллинеарны.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **сонаправленными**, а во втором — **противоположно направленными**[1]. Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается

[1] Нетрудно дать и точные определения этих понятий. Например, два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются сонаправленными (противоположно направленными), если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через их начала. Как сформулировать аналогичные определения для ненулевых векторов, лежащих на одной прямой?

следующим образом: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то это обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. На рисунке 246 изображены как сонаправленные, так и противоположно направленные векторы: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определённого направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора. Условимся считать, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором. Таким образом, на рисунке 245 $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и т. д.

Ненулевые коллинеарные векторы обладают свойствами, которые проиллюстрированы на рисунке 246, а — в.

Дадим теперь определение равных векторов.

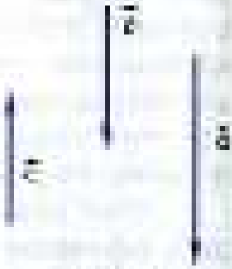
Определение

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

а)



Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

б)

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

в)

Рис. 246

81 Откладывание вектора от данной точки

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A (рис. 247). Докажем следующее утверждение:

от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

В самом деле, если $\vec{a}$ — нулевой вектор, то искомым вектором является вектор $\overrightarrow{MM}$.

Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

Рис. 247

допустим, что вектор $\vec{a}$ ненулевой, а точки A и B — его начало и конец. Проведём через точку M прямую p, параллельную AB (рис. 248; если M — точка прямой AB, то в качестве прямой p возьмём саму прямую AB). На прямой p отложим отрезки MN и MN', равные отрезку AB, и выберем из векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MN'}$ тот, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$ (на рисунке 248 вектор $\overrightarrow{MN}$). Этот вектор и является искомым вектором, равным вектору $\vec{a}$. Из построения следует, что такой вектор только один.

Рис. 248

Замечание

Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Так обозначены, например, равные векторы скорости различных точек на рисунке 244. Иногда про такие векторы говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

Практические задания

738 Отметьте точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите все ненулевые векторы, начало и конец которых совпадают с какими-то двумя из этих точек. Выпишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого вектора.

739 Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы, изображающие полёт самолёта сначала на 300 км на юг от города A до B, а потом на 500 км на восток от города B до C. Затем начертите вектор $\overrightarrow{AC}$, который изображает перемещение из начальной точки в конечную.

740 Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ так, чтобы:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 2{,}5$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 4{,}5$ см;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были не коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 3$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 1{,}5$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 1$ см.

741 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите несколько векторов: а) сонаправленных с вектором $\vec{a}$; б) сонаправленных с вектором $\vec{b}$; в) противоположно направленных вектору $\vec{b}$; г) противоположно направленных вектору $\vec{a}$.

742 Начертите два вектора: а) имеющие равные длины и неколлинеарные; б) имеющие равные длины и сонаправленные; в) имеющие равные длины и противоположно направленные. В каком случае полученные векторы равны?

743 Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$ и отметьте на плоскости три точки A, B и C. Отложите от точек A, B и C векторы, равные $\vec{a}$.

Задачи

744 Какие из следующих величин являются векторными: скорость, масса, сила, время, температура, длина, площадь, работа?

745 В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, M — середина стороны AB. Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$.

746 Основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45°$. Найдите длины векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

747 Выпишите пары коллинеарных векторов, которые определяются сторонами: а) параллелограмма $MNPQ$; б) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC; в) треугольника FGH. Укажите среди них пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

748 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$? Ответ обоснуйте.

749 Точки S и T являются серединами боковых сторон MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{NL}$ и $\overrightarrow{KL}$; б) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; в) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{KM}$; д) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?

750 Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

751 Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если: а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; б) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, а векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны.

752 Верно ли утверждение: а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$; д) если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$?

82 Сумма двух векторов

Рассмотрим пример. Пусть материальная точка переместилась из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C (рис. 249). В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, материальная точка переместилась из точки A в точку C. Поэтому результирующее перемещение можно представить вектором $\overrightarrow{AC}$. Поскольку перемещение из точки A в точку C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C, то вектор $\overrightarrow{AC}$ естественно назвать суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

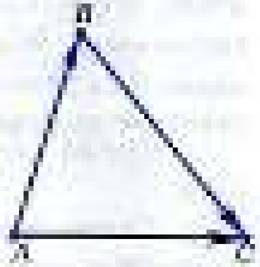


Рис. 249

Рассмотренный пример приводит нас к понятию суммы двух векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 250). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

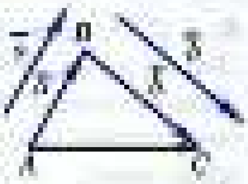


Рис. 250

Такое правило сложения векторов называется правилом треугольника. Рисунок 250 поясняет это название.

Докажем, что если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точку A, от которой откладывается вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$. Иными словами, докажем, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 251).

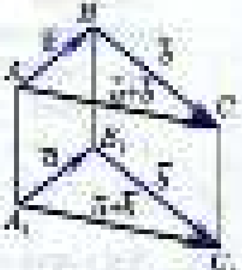


Рис. 251

Допустим, что точки A, B, A_1, точки B, C, B_1 и точки A, C, A_1 не лежат на одной прямой (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ следует, что стороны AB и A_1B_1 четырёхугольника ABB_1A_1 равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник —

параллелограмм. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Аналогично из равенства $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ следует, что четырёхугольник BCC_1B_1 — параллелограмм. Поэтому $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$. На основе полученных равенств заключаем, что $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$. Поэтому AA_1C_1C — параллелограмм, и, значит, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}+\vec{b}$.

Складывая по правилу треугольника произвольный вектор $\vec{a}$ с нулевым вектором, получаем, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Правило треугольника можно сформулировать также следующим образом: **если A, B и C — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.** Подчеркнём, что это равенство справедливо для произвольных точек A, B и C, в частности, в том случае, когда две из них или даже все три совпадают.

83 Законы сложения векторов. Правило параллелограмма

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон).

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство

1°. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ рассмотрите самостоятельно). От произвольной точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и на этих векторах построим параллелограмм $ABCD$, как показано на рисунке 252. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$. Аналогично $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Отсюда следует, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

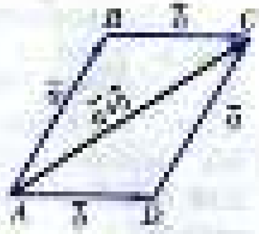


Рис. 252

2°. От произвольной точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки B — вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а от точки C — вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 253). Применяя правило треугольника, получим:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Отсюда следует, что $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Теорема доказана.

При доказательстве утверждения 1° мы обосновали так называемое **правило параллелограмма** сложения неколлинеарных векторов: чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 252). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен $\vec{a}+\vec{b}$. Правило параллелограмма часто используется в физике, например при сложении двух сил.

84 Сумма нескольких векторов

Сложение нескольких векторов производится следующим образом: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма складывается с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются. На рисунке 253 показано построение суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: от произвольной точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ и, наконец, от точки C отложен вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

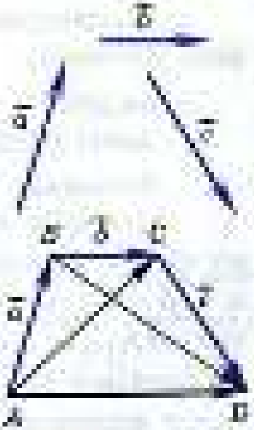


Рис. 253

Аналогично можно построить сумму четырёх, пяти и вообще любого числа векторов. На рисунке 254 показано построение суммы шести векторов. Это правило построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**. Рисунок 254 поясняет название.

Рис. 254

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ (на рисунке 255, а $n = 7$). Это равенство справедливо для любых точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, в частности в том случае, когда некоторые из них совпадают. Например, если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору (рис. 255, б).

85 Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec a$ **и** $\vec b$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec b$ равна вектору $\vec a$.

Разность векторов $\vec a$ и $\vec b$ обозначается так: $\vec a - \vec b$.

Рассмотрим задачу о построении разности двух векторов.

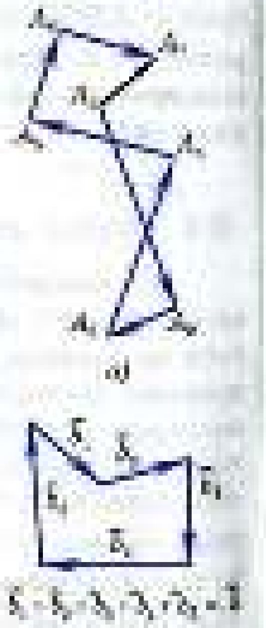


Рис. 255

Задача

Даны векторы $\vec a$ и $\vec b$. Построить вектор $\vec a - \vec b$.

Решение

Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{OA} = \vec a$ и $\overrightarrow{OB} = \vec b$ (рис. 256). По правилу треугольника $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$, или $\vec b + \overrightarrow{BA} = \vec a$. Таким образом, сумма векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\vec b$ равна $\vec a$. По определению разности векторов это означает, что $\overrightarrow{BA} = \vec a - \vec b$, т. е. вектор $\overrightarrow{BA}$ искомый. Задачу о построении разность двух векторов можно решить и другим способом. Прежде чем указать этот способ, введём понятие вектора, противоположного данному.

Рис. 266

Пусть $\vec a$ — произвольный ненулевой вектор. Вектор $\vec a_1$ называется противоположным вектору $\vec a$, если векторы $\vec a$ и $\vec a_1$ имеют равные длины и противоположно направлены. На рисунке 267 вектор $\vec a_1 = \overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\vec a = \overrightarrow{AB}$. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.

Рис. 267

Вектор, противоположный вектору $\vec a$, обозначается так: $-\vec a$. Очевидно, $\vec a + (-\vec a) = \vec 0$.

Докажем теперь теорему о разности двух векторов.

Теорема

Для любых векторов $\vec a$ и $\vec b$ справедливо равенство $\vec a - \vec b = \vec a + (-\vec b)$.

Доказательство

По определению разности векторов $(\vec a - \vec b) + \vec b = \vec a$. Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\vec b)$, получим:

$$(\vec a - \vec b) + \vec b + (-\vec b) = \vec a + (-\vec b),$$

$$\text{или } (\vec a - \vec b) + \vec 0 = \vec a + (-\vec b),$$

откуда $\vec a - \vec b = \vec a + (-\vec b)$. Теорема доказана.

Приведём теперь другое решение задачи о построении разности векторов $\vec a$ и $\vec b$. Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{OA} = \vec a$ (рис. 268). Затем от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = -\vec b$. По теореме о разности векторов $\vec a - \vec b = \vec a + (-\vec b)$, поэтому $\vec a - \vec b = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, т. е. вектор $\overrightarrow{OB}$ искомый.

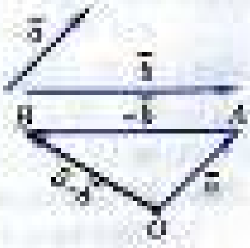


Рис. 268

Практические задания

753 Турист прошёл 20 км на восток из города A в город B, а потом 30 км на восток в город C. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$?

754 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{y}$.

755 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.

756 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{z}-\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$.

757 Начертите векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{z}$. Постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{x}+\vec{z}$.

758 Начертите два ненулевых коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$. Постройте векторы: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $-\vec{a}+\vec{b}$. Выполните ещё раз построение для случая, когда $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Задачи

759 Дан произвольный четырёхугольник $MNPQ$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$.

760 Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

761 Докажите, что если A, B, C и D — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

762 Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$; г) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; д) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

763 □ В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90^\circ$. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

764 □ Пользуясь правилом многоугольника, упростите выражения: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD})$;
б) $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD})$.

765 Пусть X, Y и Z — произвольные точки. Докажите, что векторы $\vec{p}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YZ}$, $\vec{q}=(\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{XZ})+\overrightarrow{YZ}$ и $\vec{r}=(\overrightarrow{ZY}-\overrightarrow{XY})-\overrightarrow{ZX}$ нулевые.

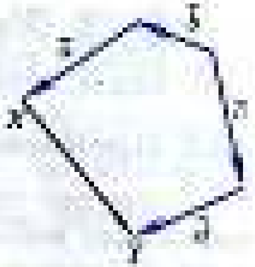


Рис. 259

766 ☐ На рисунке 259 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\overrightarrow{XY}$. Представьте вектор $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы остальных или им противоположных векторов.

767 Дан треугольник ABC. Выразите через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.

Решение

а) Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ — противоположные, поэтому $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$.

б) По правилу треугольника $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, поэтому $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$.

768 ☐ Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

769 ☐ Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$.

770 ☐ Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; б) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$; в) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DA}$.

771 ☐ Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ векторы: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$.

772 Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$, где X — произвольная точка плоскости.

773 Докажите, что для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x}-\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$. В каком случае $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$?

774 Парашютист спускается на землю со скоростью 8 м/с. Порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $8\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

§3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

86 Произведение вектора на число

Прежде чем ввести ещё одно действие — умножение вектора на число, обратимся к примеру. Представим себе, что один автомобиль движется прямолинейно с постоянной скоростью, второй автомобиль движется в том же направлении со скоростью, вдвое большей, а третий автомобиль движется ему навстречу, т. е. в противоположном направлении, и величина его скорости такая же, как у второго автомобиля. Если мы изобразим скорость первого автомобиля вектором $\vec{v}$ (рис. 260, а), то естественно изобразить скорость второго автомобиля вектором, у которого направление такое же, как у вектора $\vec{v}$, а длина в два раза больше, и обозначить этот вектор $2\vec{v}$. Скорость третьего автомобиля изобразится вектором, противоположным вектору $2\vec{v}$, т. е. вектором $-2\vec{v}$ (см. рис. 260, а). Естественно считать, что вектор $2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число 2, а вектор $-2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число -2. Этот пример подсказывает, каким образом следует ввести умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. На рисунке 260, б изображены вектор $\vec{a}$ и векторы $3\vec{a}$, $-1,5\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$.

Рис. 260

Из определения произведения вектора на число непосредственно следует, что:

1) произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;

2) для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.

Рис. 261

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами:

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1°. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон).

2°. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон).

3°. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

Рис. 262

Рисунок 261 иллюстрирует сочетательный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k = 2$, $l = 3$.

Рисунок 262 иллюстрирует первый распределительный закон. Этот рисунок соответствует случаю, когда $k = 3$, $l = 2$.

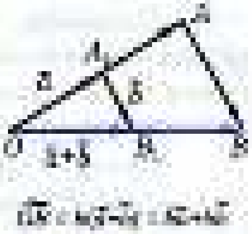


Рис. 263

Рисунок 263 иллюстрирует второй распределительный закон. На этом рисунке треугольники OAB и OA_1B_1 подобны с коэффициентом подобия k, поэтому $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = k(\vec{a} + \vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$. Таким образом, $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Замечание

Рассмотренные нами свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например, выражение $\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$ можно преобразовать так:

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c}.$$

87 Применение векторов к решению задач

Векторы могут использоваться для решения геометрических задач и доказательства теорем. Приведём примеры. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу.

Задача 1

Точка C — середина отрезка AB, а O — произвольная точка плоскости (рис. 264). Доказать, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

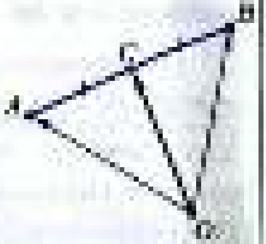


Рис. 264

Решение

По правилу треугольника $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$. Складывая эти равенства, получаем: $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$. Так как точка C — середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Таким образом, $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, или

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Задача 2

Доказать, что прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

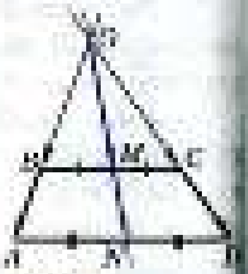


Рис. 265

Решение

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M и N — середины оснований BC и AD, а O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 265). Докажем, что точка O лежит на прямой MN.

Треугольники OAD и OBC подобны по первому признаку подобия треугольников (докажите это), поэтому $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = k$.

Так как $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OD}$, то

$$\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Аналогично $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

Подставив в это равенство выражения (1) для $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$, получим:

$$\overrightarrow{ON} = k\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = k\cdot\overrightarrow{OM}.$$

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, и, значит, точка O лежит на прямой MN.

88 Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. Докажем теорему о средней линии трапеции.

Теорема

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 266). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$.

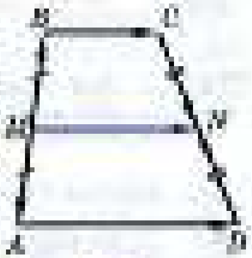


Рис. 266

По правилу многоугольника $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. Сложив эти равенства, получим:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}).$$

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, откуда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ также сонаправлены, а длина вектора $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ равна $AD + BC$. Отсюда следует, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$. Теорема доказана.

Практические задания

775 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают, и отметьте какую-нибудь точку O. От точки O отложите векторы, равные $2\vec{p}$ и $\frac{1}{2}\vec{q}$.

776 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и постройте векторы: а) $\vec{x}+2\vec{y}$; б) $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$; в) $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; г) $1\frac{1}{2}\vec{x}-3\vec{y}$; д) $0\vec{x}+4\vec{y}$; е) $-2\vec{x}+0\vec{y}$. Выполните задания а) — е) для двух коллинеарных ненулевых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

777 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают. Постройте векторы $\vec{m}=2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{l}=-2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{k}=\frac{2}{3}\vec{q}-\vec{p}$.

778 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы: а) $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$; б) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

Задачи

779 □ Дан вектор $\vec{p}=3\vec{a}$, где $\vec{a}\neq\vec{0}$. Как направлен каждый из векторов $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ по отношению к вектору $\vec{p}$? Выразите длины этих векторов через $|\vec{p}|$.

780 Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства: а) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; б) $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

781 □ Пусть $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$. Выразите через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы: а) $2\vec{x}-2\vec{y}$; б) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

782 □ В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD, точка G — середина стороны BC. Выразите векторы $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AG}$ через векторы $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

783 □ Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причём $BM : MC = 3 : 1$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

784 □ В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а M — такая точка на стороне AD, что $AM=\frac{1}{2}MD$.

Выразите через векторы $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ следующие векторы:
а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$;
б) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$.

785 Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right).$$

786 ☐ Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

787 ☐ Точка O — середина медианы EG треугольника DEF. Выразите вектор $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$.

Применение векторов к решению задач

788 Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC.

Решение

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ (см. задачу 1, п. 87). Сложив эти равенства, получим $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=$
$=\frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)\right)=\vec{0}$.

Отсюда следует, что если мы построим сумму векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ по правилу многоугольника (п. 84), то получим треугольник, удовлетворяющий условиям задачи (треугольник MNP на рисунке 267).

789 На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

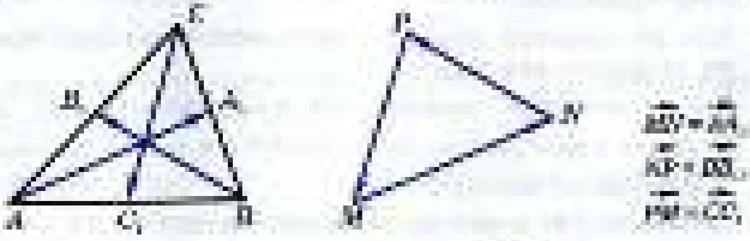


Рис. 267

790 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

791 Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, точкой пересечения делятся пополам.

792 Докажите теорему о средней линии треугольника (п. 64).

Средняя линия трапеции

793 □ Боковые стороны трапеции равны 13 см и 15 см, а периметр равен 48 см. Найдите среднюю линию трапеции.

794 □ Сторона AB треугольника ABC разделена на четыре равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Стороны AB и AC треугольника отсекают на этих параллельных прямых три отрезка, наименьший из которых равен 3,4 см. Найдите два других отрезка.

795 □ Найдите диаметр окружности, если его концы удалены от некоторой касательной на 18 см и 12 см.

796 □ Из концов диаметра CD данной окружности проведены перпендикуляры CC_1 и DD_1 к касательной, не перпендикулярной к диаметру CD. Найдите DD_1, если $CC_1 = 11$ см, а $CD = 27$ см.

797 Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

798 □ Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 48 см, а средняя линия делится диагональю на два отрезка, равные 11 см и 35 см. Найдите углы трапеции.

799 □ Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Перпендикуляр, проведённый из вершины B к большему основанию AD, делит это основание на два отрезка, больший из которых равен 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Вопросы для повторения к главе IX

1 Приведите примеры векторных величин, известных вам из курса физики.

2 Дайте определение вектора. Объясните, какой вектор называется нулевым.

3 Что называется длиной ненулевого вектора? Чему равна длина нулевого вектора?

4 Какие векторы называются коллинеарными? Изобразите на рисунке сонаправленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и противоположно направленные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

5 Дайте определение равных векторов.

6. Объясните смысл выражения: «Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A». Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

7. Объясните, какой вектор называется суммой двух векторов. В чём заключается правило треугольника сложения двух векторов?

8. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

9. Сформулируйте и докажите теорему о законах сложения векторов.

10. В чём заключается правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов?

11. В чём заключается правило многоугольника сложения нескольких векторов?

12. Какой вектор называется разностью двух векторов? Постройте разность двух данных векторов.

13. Какой вектор называется противоположным данному? Сформулируйте и докажите теорему о разности векторов.

14. Какой вектор называется произведением данного вектора на данное число?

15. Чему равно произведение $k\vec{a}$, если: а) $\vec{a} = \vec{0}$; б) $k = 0$?

16. Могут ли векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ быть неколлинеарными?

17. Сформулируйте основные свойства умножения вектора на число.

18. Приведите пример применения векторов к решению геометрических задач.

19. Какой отрезок называется средней линией трапеции?

20. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.

Дополнительные задачи

800. Докажите, что если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, то $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$, а если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены, причём $|\vec{m}| \geq |\vec{n}|$, то $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.

801. Докажите, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливы неравенства $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

802. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка N так, что $BN = 2NC$. Выразите вектор $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

803 На сторонах MN и NP треугольника MNP отмечены соответственно точки X и Y так, что $\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}$ и $\frac{NY}{YP} = \frac{3}{2}$. Выразите векторы $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{MY}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{NM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{NP}$.

804 Основание AD трапеции $ABCD$ в три раза больше основания BC. На стороне AD отмечена такая точка K, что $AK = \frac{1}{3} AD$. Выразите векторы $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

805 Три точки A, B и C расположены так, что $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

806 Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

807 Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}.$$

808* Точки A и C — середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, а точки B и D — середины двух других его сторон. Докажите, что для любой точки O верно равенство

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

809 Один из углов прямоугольной трапеции равен 120°. Найдите её среднюю линию, если меньшая диагональ и бо́льшая боковая сторона трапеции равны a.

810 Докажите, что вершина угла, образованного биссектрисами двух углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе V

811 Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны. Докажите, что

$$A_1A_2 - A_4A_5 = A_3A_4 - A_6A_1 = A_5A_6 - A_2A_3.$$

812 Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 удовлетворяют условиям $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Докажите, что существует выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны, причём $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_5 = a_4$, $A_5A_6 = a_5$ и $A_6A_1 = a_6$.

813 Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму произвольного выпуклого четырёхугольника, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

814 Докажите, что диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются.

815 Докажите, что в любом четырёхугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

816 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Прямая, проведённая через точку D перпендикулярно к AD, пересекает прямую AC в точке E. Точки M и K — основания перпендикуляров, проведённых из точек B и D к прямой AC. Найдите MK, если $AE = a$.

817 Докажите, что в треугольнике сумма трёх медиан меньше периметра, но больше половины периметра.

818 Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

819 Найдите множество середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой, не проходящей через эту точку.

820 Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярна к основаниям. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

821 При пересечении биссектрис всех углов прямоугольника образовался четырёхугольник. Докажите, что этот четырёхугольник — квадрат.

822 На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих квадратов являются вершинами квадрата.

823 На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $AM = BK + DM$.

Рис. 268

824 На рисунке 268 изображены три квадрата. Найдите сумму $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.

825 Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что $\angle MAB = 60°$, $\angle MCD = 15°$. Найдите $\angle MBC$.

826 На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $EBKP$. Докажите, что треугольник APQ прямоугольный и равнобедренный.

827 Постройте равнобедренную трапецию по основаниям и диагонали.

828 Докажите, что если треугольник имеет: а) ось симметрии, то он равнобедренный; б) более чем одну ось симметрии, то он равносторонний.

Задачи к главе VI

829 Через точку M, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам и пересекающие стороны AB, BC, CD и DA соответственно в точках P, Q, R и T. Докажите, что если точка M лежит на диагонали AC, то площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны, и, обратно, если площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны, то точка M лежит на диагонали AC.

830 На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника CMK, если площади треугольников OMA, OAB и OBK равны соответственно S_1, S_2, S_3.

831 На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K, а на отрезке MK — точка P так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK}$. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMP и BKP равны S_1 и S_2.

832 Точки P, Q, R и T соответственно — середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP образуется параллелограмм, и найдите отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

833 Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведённый из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую боковую сторону.

834 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

835 Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые делят трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника равна сумме площадей трёх треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции.

836 Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и K. Докажите, что площади треугольников DCM и AKB равны.

837 Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена за точку B на отрезок BE, а сторона AD продолжена за точку D на отрезок DK. Прямые ED и KB пересекаются в точке O. Докажите, что площади четырёхугольников $ABOD$ и $CEOK$ равны.

838 Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части. Докажите, что площадь той части четырёхугольника, которая заключена между этими отрезками, в три раза меньше площади самого четырёхугольника.

839 Середины K и M сторон AB и DC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соединены отрезками KD, KC, MA и MB соответственно с его вершинами. Докажите, что площадь четырёхугольника, заключённого между этими отрезками, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к сторонам AD и BC.

840 Точка A лежит внутри угла, равного $60°$. Расстояния от точки A до сторон угла равны a и b. Найдите расстояние от точки A до вершины угла.

841 Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AB и AD в точках K и M. Найдите площадь этого параллелограмма, если площади треугольников KBC и CDM равны соответственно S_1 и S_2.

842 Через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезок AB в точке M и отрезок CD в точке K. Прямая, проведённая через точку K параллельно отрезку AB, пересекает отрезок BD в точке T, а прямая, проведённая через точку M параллельно отрезку CD, пересекает отрезок AC в точке E. Докажите, что прямые BC и ET параллельны.

843 Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На лучах BA и BC взяты точки K и M так, что площади треугольников BDM и BCK равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC = \alpha$.

844 Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Известно, что $MB = a$, $MC = b$ и $MD = c$. Найдите длину отрезка MA.

845 В треугольнике ABC проведена высота BD. Отрезок KA перпендикулярен к отрезку AB и равен отрезку DC, отрезок CM перпендикулярен к отрезку BC и равен отрезку AD. Докажите, что отрезки MB и KB равны.

846 Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O так, что справедливо равенство $S_{OAB} = S_{OAC} = S_{OBC}$. Докажите, что справедливо равенство $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

Задачи к главе VII

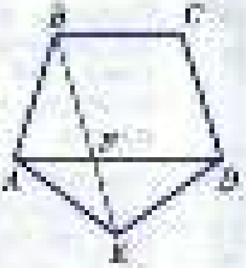


Рис. 260

847 На рисунке 260 изображен правильный пятиугольник $ABCDE$, т. е. выпуклый пятиугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Докажите, что:

а) $\triangle AED \sim \triangle AFE$; б) $\dfrac{DA}{DF} = \dfrac{DF}{AF}$.

848 В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину M стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

849 Докажите, что отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.

850 Точки E и F лежат на стороне AB треугольника ABC, причём точка E лежит на отрезке AF и $AE = BF$. Прямая, проведенная через точку E параллельно стороне AC, пересекает прямую, проведённую через точку F параллельно стороне BC, в точке K. Докажите, что точка K лежит на медиане треугольника ABC, проведённой к стороне AB.

851 Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, не перекрывающегося с этим треугольником. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до вершины прямого угла треугольника, если сумма катетов равна a.

852 В треугольнике ABC $\angle A = \dfrac{180°}{7}$ и $\angle B = \dfrac{360°}{7}$. Докажите, что $\dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AB}$.

853 Из точки M внутренней области угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к его сторонам OA и OB. Из точек P и Q проведены перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA. Докажите, что $RS \perp OM$.

854 В равнобедренном треугольнике ABC из середины D основания AC проведён перпендикуляр DH к стороне BC. Пусть M — середина отрезка DH. Докажите, что $BM \perp AH$.

855 Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр CD к гипотенузе, а из точки D — перпендикуляры DE и DF к катетам AC и BC. Докажите, что:

а) $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$;

б) $AE^2 + BF^2 + 3CD^2 = AB^2$;

в) $\sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2} = \sqrt[3]{AB^2}$.

856 Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ADP = \frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD = BD = CD$. а) Найдите все углы четырёхугольника. б) Докажите, что $AB^2 = BP \cdot BD$.

857 Точка M не лежит на прямых, содержащих стороны параллелограмма $ABCD$. Докажите, что существуют точки N, P и Q, расположенные так, что A, B, C и D являются соответственно серединами отрезков MN, NP, PQ и QM.

858 Докажите, что если противоположные стороны выпуклого четырёхугольника не параллельны, то их полусумма больше отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон.

859 Докажите, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна половине его периметра, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

860 Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

861 Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольник ABO, где AB — меньшее основание трапеции, равносторонний. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины отрезков OA, OD и BC, равносторонний.

862 Из вершины A треугольника ABC проведены перпендикуляры AM и AK к биссектрисам внешних углов этого треугольника при вершинах B и C. Докажите, что отрезок MK равен половине периметра треугольника ABC.

863 Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 соединяют вершины треугольника ABC с внутренними точками противоположных сторон. Докажите, что середины этих отрезков не лежат на одной прямой.

864 Середины трёх высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

865 В треугольнике ABC, сторона AC которого в два раза больше стороны BC, проведены биссектриса CM и биссектриса внешнего угла при вершине C, пересекающая прямую AB в точке K. Докажите, что

$$S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{CMK}.$$

866 Стороны треугольника EFG соответственно равны медианам треугольника ABC. Докажите, что $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

867 В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении $1:2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

868 Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD, CD и BC соответственно в точках M, N и P. Докажите, что отрезок AM является средним пропорциональным между MN и MP.

869 Постройте точку, принадлежащую большему основанию равнобедренной трапеции и отстоящую от данной боковой стороны в n раз дальше, чем от другой ($n = 2, 3, 4$).

870 Точка C лежит на отрезке AB. Постройте точку D прямой AB, не лежащую на отрезке AB, так, чтобы $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$. Всегда ли задача имеет решение?

871 Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме основания и высоты, проведённой к основанию.

872 Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

873 Постройте треугольник ABC, если даны $\angle A$, $\angle C$ и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH.

874 Постройте треугольник по трём высотам.

875 Постройте трапецию по боковой стороне, большему основанию, углу между ними и отношению двух других сторон.

876 Постройте ромб, площадь которого равна площади квадрата, если известно, что отношение диагоналей этого ромба равно отношению данных отрезков.

877 Две окружности имеют единственную общую точку M. Через эту точку проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках A и A_1, а другую — в точках B и B_1. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

878 Прямая AC — касательная к окружности с центром O_1, а прямая BD — касательная к окружности с центром O_2 (рис. 270). Докажите, что:
а) $AD \parallel BC$;
б) $AB^2 = AD \cdot BC$;
в) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

879 Точки B_1 и C_1 — середины дуг AB и AC (рис. 271). Докажите, что $AM = AN$.

880 Окружность отсекает на двух прямых, которые пересекаются в точке, не лежащей на окружности, равные хорды. Докажите, что расстояния от точки пересечения этих прямых до концов той и другой хорды соответственно равны между собой.

881 Докажите, что для всех хорд AB данной окружности величина $\frac{AB^2}{AD}$, где AD — расстояние от точки A до касательной в точке B, имеет одно и то же значение.

882 Через точку A пересечения двух окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке B, а другую — в точке C. Докажите, что отрезок BC будет наибольшим тогда, когда он параллелен прямой O_1O_2.

883 Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности отложен от центра O отрезок, равный расстоянию от конца M этого радиуса до прямой AB. Найдите множество концов построенных таким образом отрезков.

884 Внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC = 30°$, $\angle BMA = 17°$. Найдите углы BAM и BCM.

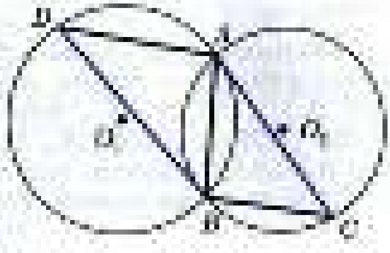


Рис. 270

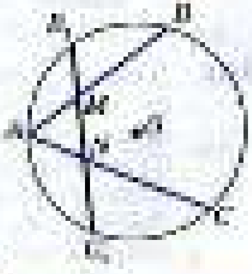


Рис. 271

885 Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника при этой вершине. Проведённые прямые, пересекаясь, образуют новый треугольник. Докажите, что вершины этого треугольника лежат на прямых, содержащих биссектрисы треугольника ABC.

886 Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, а A', B', C' — точки, симметричные точке H относительно прямых BC, CA, AB. Докажите, что точки A', B', C' лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

887 Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

888 Из вершины B треугольника ABC проведены высота BH и биссектриса угла B, которая пересекает в точке E описанную около треугольника окружность с центром O. Докажите, что луч BE является биссектрисой угла OBH.

889 Произвольная точка X окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что один из отрезков AX, BX и CX равен сумме двух других отрезков.

890 Докажите, что если диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырёхугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

891 В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке, лежащей на стороне CD. Докажите, что $CD = BC + AD$.

892 Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению её оснований.

893 Докажите, что в любом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

894 Докажите, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

895 Для неравностороннего треугольника ABC точка O является центром описанной окружности, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты AA_1, BB_1 и CC_1, точки A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH, а точки A_3, B_3, C_3 — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности (окружность Эйлера).

896 Докажите, что основания перпендикуляров, проведённых из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, к прямым, содержащим стороны этого треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

897 Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

898 Даны окружность с центром O, точка M и отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте прямую p так, чтобы окружность отсекала на ней хорду, равную P_1Q_1, и расстояние от точки M до прямой p равнялось P_2Q_2.

899 Внутри окружности дана точка. Постройте хорду, проходящую через эту точку, так, чтобы она была наименьшей из всех хорд, проходящих через эту точку.

900 Постройте треугольник:
а) по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой к данной стороне;
б) по углу, высоте, проведённой из вершины данного угла, и периметру.

901 Постройте треугольник, если дана описанная окружность и на ней точки A, B и M, через которые проходят прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведённые из одной вершины.

902 Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, для которого эти точки являются основаниями высот. Сколько решений имеет задача?

Задачи к главе IX

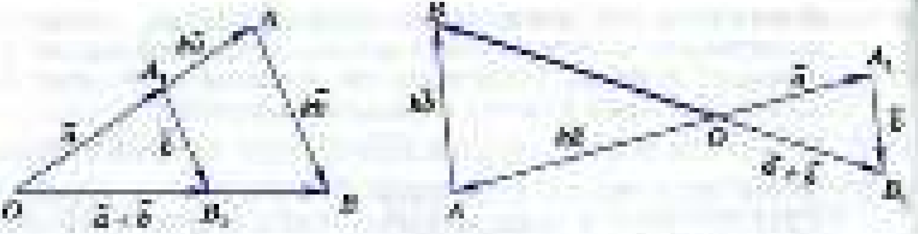
903 Докажите утверждения об основных свойствах умножения вектора на число (п. 86).

Решение

1. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Имеем: $|(kl)\vec{a}| = |kl|\,|\vec{a}| = |k|\,|l|\,|\vec{a}| = |k|\,|l\vec{a}| = |k(l\vec{a})|$.

Далее, если $kl > 0$, то $(kl)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $k(l\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$; если же $kl < 0$, то $(kl)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $k(l\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$. И в том и в другом случае $(kl)\vec{a} \uparrow\uparrow k(l\vec{a})$. Следовательно, $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$.

2. Докажем, что для любого числа k и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$. Если $k = 0$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть $k \neq 0$.



$k>0$

$\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

а)

$k<0$

$\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

б)

Рис. 272

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай $\vec{a} \parallel \vec{b}$ рассмотрите самостоятельно). Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, а от точек A_1 и A — векторы $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$ (рис. 272, а, б). Треугольники OA_1B_1 и OAB подобны с коэффициентом подобия $|k|$. Следовательно, $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OB_1}=k(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=k\vec{a}+k\vec{b}$. Итак, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

3. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$. Если $k=l=0$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть хотя бы одно из чисел k, l отлично от нуля. Для определённости будем считать, что $|k| \geq |l|$, и, следовательно, $k \neq 0$ и $\left|\frac{l}{k}\right| \leq 1$.

Рассмотрим вектор $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}$. Очевидно, $\left(\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}\right) \uparrow\uparrow \vec{a}$. Далее, $\left|\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}\right|=|\vec{a}|+\frac{l}{k}|\vec{a}|=\left(1+\frac{l}{k}\right)|\vec{a}|$.

Следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}=\left(1+\frac{l}{k}\right)\vec{a}$. Умножив обе части этого равенства на k, получим, что справедливо равенство $k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$.

904 *Дан четырёхугольник $MNPQ$ и точка O. Что представляет собой данный четырёхугольник, если $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$?*

905 *Дан четырёхугольник $ABCD$ и точка O. Точки E, F, G и H симметричны точке O относительно середин сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Что представляет собой четырёхугольник $EFGH$?*

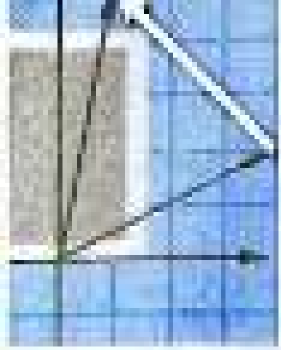
906 Дан треугольник ABC. Докажите, что вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ направлен вдоль биссектрисы угла A, а вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A.

907 Докажите следующее утверждение: три точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют числа k, l и m, одновременно не равные нулю, такие, что $k+l+m=0$ и для произвольной точки O выполняется равенство $k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

908 Используя векторы, докажите, что середины диагоналей четырехугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

909 Биссектрисы внешних углов треугольника ABC при вершинах A, B и C пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Используя векторы, докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

910 Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты неравностороннего треугольника ABC, а O — центр описанной около этого треугольника окружности. Используя векторы, докажите, что точка G пересечения медиан треугольника принадлежит отрезку HO и делит этот отрезок в отношении $2:1$, считая от точки H, т. е. $\frac{HG}{GO}=2$.



Глава X

Метод координат

С понятием декартовой прямоугольной системы координат вы знакомы по курсу алгебры. Введение системы координат позволяет описывать геометрические фигуры, в частности окружности и прямые, с помощью уравнений, что даёт возможность применять в геометрии алгебраические методы. Так, например, написав уравнения двух данных окружностей, можно с их помощью исследовать взаимное расположение этих окружностей. Наряду с координатами точек будут введены координаты векторов и тем самым будет расширен координатно-векторный аппарат геометрии.

§ 1 Координаты вектора

89 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Докажем сначала лемму[1] о коллинеарных векторах.

Лемма

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство

Возможны два случая: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Возьмём число $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k \geq 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены (рис. 273, а). Кроме того, их длины равны: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$. Поэтому $\vec{b} = k\vec{a}$.

Рис. 273

[1] Леммой называется вспомогательная теорема, с помощью которой доказывается следующая теорема или несколько теорем.

2) $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$. Возьмём число $k = -\frac{|\vec b|}{|\vec a|}$. Так как $k<0$, то векторы $k\vec a$ и $\vec b$ снова сонаправлены (рис. 273, б). Их длины также равны: $|k\vec a| = |k|\,|\vec a| = \frac{|\vec b|}{|\vec a|}\cdot|\vec a| = |\vec b|$. Поэтому $\vec b = k\vec a$. Лемма доказана.

Пусть $\vec a$ и $\vec b$ — два данных вектора. Если вектор $\vec p$ представлен в виде $\vec p = x\vec a + y\vec b$, где x и y — некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec p$ **разложен по векторам** $\vec a$ и $\vec b$. Числа x и y называются **коэффициентами разложения**. Докажем теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Теорема

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Пусть $\vec a$ и $\vec b$ — данные неколлинеарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec p$ можно разложить по векторам $\vec a$ и $\vec b$. Возможны два случая.

Рис. 274

1) Вектор $\vec p$ коллинеарен одному из векторов $\vec a$ и $\vec b$, например вектору $\vec b$. В этом случае по лемме о коллинеарных векторах вектор $\vec p$ можно представить в виде $\vec p = y\vec b$, где y — некоторое число, и, следовательно, $\vec p = 0\cdot\vec a + y\cdot\vec b$, т. е. вектор $\vec p$ разложен по векторам $\vec a$ и $\vec b$.

2) Вектор $\vec p$ не коллинеарен ни вектору $\vec a$, ни вектору $\vec b$. Отметим какую-нибудь точку O и отложим от неё векторы $\overrightarrow{OA} = \vec a$, $\overrightarrow{OB} = \vec b$, $\overrightarrow{OP} = \vec p$ (рис. 274). Через точку P проведём прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через A_1

точку пересечения этой прямой с прямой OA. По правилу треугольника $\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$. Но векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1P}$ коллинеарны соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому существуют такие числа x и y, что $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P} = y\vec{b}$. Следовательно, $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем теперь, что коэффициенты x и y разложения определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ имеет место другое разложение $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Вычитая второе равенство из первого и используя правила действий над векторами, получаем $\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$. Это равенство может выполняться только в том случае, когда коэффициенты $x - x_1$ и $y - y_1$ равны нулю. В самом деле, если предположить, например, что $x - x_1 \neq 0$, то из полученного равенства найдём $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$, а значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, $x - x_1 = 0$ и $y - y_1 = 0$, откуда $x = x_1$ и $y = y_1$. Это и означает, что коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ определяются единственным образом. **Теорема доказана.**

90 Координаты вектора

Понятие прямоугольной системы координат (или, как иногда говорят, декартовой системы координат) нам известно из курса алгебры.

Напомним, что для задания прямоугольной системы координат нужно провести две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрать направление (оно обозначается стрелкой) и выбрать единицу измерения отрезков. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

В дальнейшем под длиной отрезка мы будем понимать это число.

Отложим от начала координат O единичные векторы (т. е. векторы, длины которых равны единице) $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, чтобы направление вектора $\vec{i}$ совпало с направлением оси Ox, а направление вектора $\vec{j}$ — с направлением оси Oy (рис. 275). Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовём **координатными векторами**.

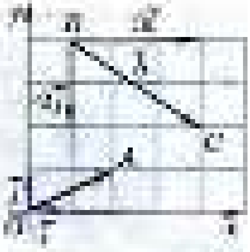


Рис. 275

Координатные векторы не коллинеарны, поэтому любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$, причём коэффициенты разложения (числа x и y) определяются единственным образом. Коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{p}$** в данной системе координат. Координаты вектора будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{p}\{x; y\}$. На рисунке 276 $\overrightarrow{OA}\{2; 1\}$ и $\vec{b}\{3; -2\}$.

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$, то его координаты равны нулю: $\vec{0}\{0; 0\}$. Если векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ равны, то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Таким образом, **координаты равных векторов соответственно равны.**

Рассмотрим правила, позволяющие по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.

1°. **Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.**

Докажем это утверждение для двух векторов. Рассмотрим векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$. Так как $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, то, пользуясь свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим:

$$\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=(x_1+x_2)\,\vec{i}+(y_1+y_2)\,\vec{j}.$$

Отсюда следует, что координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$.

Аналогично доказываются следующие утверждения:

2°. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Иными словами, если $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$. Проведите доказательство самостоятельно.

3°. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

В самом деле, пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x;\ y\}$. Найдём координаты вектора $k\vec{a}$, где k — произвольное число. Так как $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$, то $k\vec{a}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты вектора $k\vec{a}$ равны $\{kx;\ ky\}$.

Рассмотренные правила позволяют определить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов с известными координатами. Пусть, например, требуется найти координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$, если известно, что $\vec{a}\,\{1;\ -2\}$, $\vec{b}\,\{0;\ 3\}$, $\vec{c}\,\{-2;\ 3\}$.

По правилу 3° вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2;\ -4\}$, а вектор $-\frac{1}{3}\vec{b}$ координаты $\{0;\ -1\}$. Так как $\vec{p}=(2\vec{a})+\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{c}$, то координаты вектора $\vec{p}$ можно найти по правилу 1°: $\{2+0-2;\ -4-1+3\}$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0;\ -2\}$.

Задачи

911 Найдите такое число k, чтобы выполнялось равенство $\vec{n} = k\vec{m}$, если известно, что: а) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}| = 0{,}5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см; б) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}| = 12$ см, $|\vec{n}| = 24$ дм; в) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}| = 400$ мм, $|\vec{n}| = 4$ дм; г) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}| = \sqrt{2}$ см, $|\vec{n}| = \sqrt{50}$ см.

912 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, M — середина отрезка AO. Найдите, если это возможно, такое число k, чтобы выполнялось равенство: а) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{CA}$; ж) $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AM}$; з) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CM}$; и) $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{BD}$.

913 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{a}$; б) $\vec{b} - 2\vec{a}$ и $\vec{a}$? Ответ обоснуйте.

914 Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ не коллинеарны; в) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$ не коллинеарны.

915 Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, причём $AM : MC = 4 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

916 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y, удовлетворяющие равенству: а) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$; б) $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = \vec{0}$; в) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$; г) $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0}$.

917 Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте векторы с началом в точке O, заданные координатами $\vec{a}\{3; 0\}$, $\vec{b}\{2; -1\}$, $\vec{c}\{0; -3\}$, $\vec{d}\{1; 1\}$, $\vec{e}\{2; \sqrt{2}\}$.

918 Разложите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$, изображённые на рисунке 278, *а*, *б*, *в*, по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и найдите их координаты.

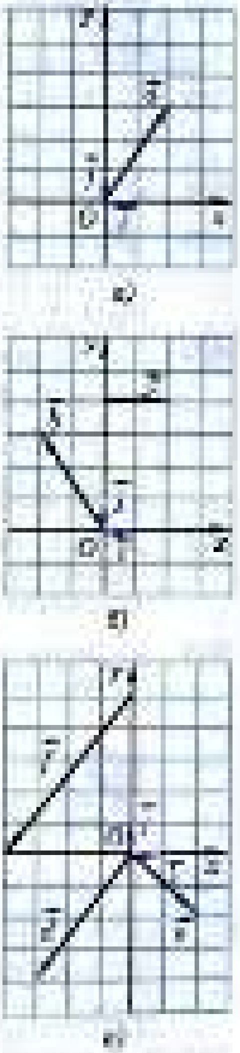


Рис. 278

919 Выпишите координаты векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 8\vec{i}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e} = -2\vec{j}$, $\vec{f} = -\vec{i}$.

920 Запишите разложения по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторов: а) $\vec{x}\{-3; \frac{1}{5}\}$; б) $\vec{y}\{-2; -3\}$; в) $\vec{z}\{-1; 0\}$; г) $\vec{u}\{0; 3\}$; д) $\vec{v}\{0; 1\}$.

921 Найдите числа x и y, удовлетворяющие условию: а) $x\vec{i} + y\vec{j} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; б) $-3\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 7\vec{j}$; в) $x\vec{i} + y\vec{j} = -4\vec{i}$; г) $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$.

922 Найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{3; 2\}$, $\vec{b}\{2; 5\}$; б) $\vec{a}\{3; -4\}$, $\vec{b}\{1; 5\}$; в) $\vec{a}\{-4; -2\}$, $\vec{b}\{5; 3\}$; г) $\vec{a}\{2; 7\}$, $\vec{b}\{-3; -7\}$.

923 Найдите координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{5; 3\}$, $\vec{b}\{3; 1\}$; б) $\vec{a}\{3; 2\}$, $\vec{b}\{-3; 2\}$; в) $\vec{a}\{3; 6\}$, $\vec{b}\{4; -3\}$; г) $\vec{a}\{-5; -6\}$, $\vec{b}\{2; -4\}$.

924 Найдите координаты векторов $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$, если $\vec{a}\{3; 2\}$.

925 Даны векторы $\vec{a}\{2; 4\}$, $\vec{b}\{-2; 0\}$, $\vec{c}\{0; 0\}$, $\vec{d}\{-2; -3\}$, $\vec{e}\{2; -3\}$, $\vec{f}\{0; 5\}$. Найдите координаты векторов, противоположных данным.

926 Найдите координаты вектора $\vec{v}$, если: а) $\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a}\{2; -5\}$, $\vec{b}\{-5; 2\}$; б) $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{a}\{4; 1\}$, $\vec{b}\{1; 2\}$, $\vec{c}\{2; 7\}$;
в) $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{a}\{-7; -1\}$, $\vec{b}\{-1; 7\}$, $\vec{c}\{4; -6\}$;
г) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a}\{7; -2\}$, $\vec{b}\{2; 5\}$, $\vec{c}\{-3; 3\}$.

927 Докажите, что если два вектора коллинеарны, то координаты одного вектора пропорциональны координатам другого. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

928 Даны векторы $\vec{a}\{3; 7\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$, $\vec{c}\{6; 14\}$, $\vec{d}\{2; -1\}$, $\vec{e}\{2; 4\}$. Укажите среди этих векторов попарно коллинеарные векторы.

§2 Простейшие задачи в координатах

91 Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

Рассмотрим прямоугольную систему координат и какую-нибудь точку M с координатами $(x; y)$. Выясним, как определяются числа x и y.

Проведём через точку M прямые, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1 и M_2 точки пересечения этих прямых с осями Ox и Oy (рис. 277). Число x (абсцисса точки M) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси (рис. 277, *а*), $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси (рис. 277, *б*); $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O.

Аналогично определяется число y (ордината точки M). На рисунке 278 изображена прямоугольная система координат Oxy и отмечены точки $A\,(3;\,2)$, $B\,(-4;\,3)$, $C\,(-2{,}5;\,0)$.

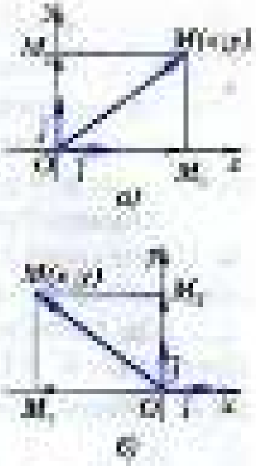


Рис. 277

Рис. 278

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовём **радиус-вектором** точки M. Докажем, что координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора. Воспользуемся равенством $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (см. рис. 277) и докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$. Если $x > 0$ (как на рисунке 277, *а*), то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если $x < 0$ (как на рисунке 277, *б*), то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если $x = 0$, то $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$ и равенство $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ в этом случае также справедливо. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$.

Следовательно, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x;\,y\}$, т. е. равны соответствующим координатам точки M, что и требовалось доказать.

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B. Пусть точка A имеет координаты $(x_1;\,y_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\,y_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 279), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов

Рис. 279

$\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$. Но $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ — радиус-векторы точек B и A, и, значит, $\overrightarrow{OB}$ имеет координаты $\{x_2; y_2\}$, а $\overrightarrow{OA}$ имеет координаты $\{x_1; y_1\}$.

Следовательно, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Таким образом, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

На рисунке 275 точки B и C имеют координаты $(1; 4)$ и $(4; 2)$, поэтому координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ равны $\{3; -2\}$.

92 Простейшие задачи в координатах

Введение системы координат даёт возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и, таким образом, использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется **методом координат**.

Решим три вспомогательные задачи а) — в).

а) Координаты середины отрезка. Пусть в системе координат Oxy точка A имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2)$. Выразим координаты $(x; y)$ середины C отрезка AB через координаты его концов.

Так как точка C — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right). \qquad (1)$$

(Это равенство было доказано в п. 87.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\,\{x; y\}$, $\overrightarrow{OA}\,\{x_1; y_1\}$, $\overrightarrow{OB}\,\{x_2; y_2\}$. Записывая равенство (1) в координатах, получим

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

б) Вычисление длины вектора по его координатам. Докажем, что длина вектора $\vec{a}\{x; y\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и проведём через точку A перпендикуляры AA_1 и AA_2 к осям Ox и Oy (рис. 280). Координаты точки A равны координатам вектора $\overrightarrow{OA}$, т. е. $(x; y)$. Поэтому $OA_1 = |x|$, $AA_1 = OA_2 = |y|$ (мы рассматриваем случай, когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$; другие случаи рассмотрите самостоятельно). По теореме Пифагора

Рис. 280

$$OA = \sqrt{OA_1^2 + AA_1^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Но $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = OA$, поэтому $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, что и требовалось доказать.

в) Расстояние между двумя точками. Пусть точка M_1 имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка M_2 — координаты $(x_2; y_2)$. Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. Следовательно, длина этого вектора может быть найдена по формуле

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Но $|\overrightarrow{M_1M_2}| = d$. Таким образом, расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Задачи

929 □ Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy. Найдите координаты вершин треугольника ABO, если: а) $OA = 5$, $OB = 3$; б) $OA = a$, $OB = b$.

930 □ Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy. Найдите координаты вершин прямоугольника $OACB$, если: а) $OA = 6,5$, $OB = 3$; б) $OA = a$, $OB = b$.

931 Начертите квадрат $MNPQ$ так, чтобы вершина P имела координаты $(-3; 3)$, а диагонали квадрата пересекались в начале координат. Найдите координаты точек M, N и Q.

932 Найдите координаты вершин равнобедренного треугольника ABC, изображённого на рисунке 281, если $AB = 2a$, а высота CO равна h.

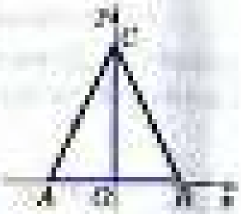


Рис. 281

933 ☐ Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(12; -3)$.

934 ☐ Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, зная координаты его начала и конца: а) $A(2; 7)$, $B(-2; 7)$; б) $A(-5; 1)$, $B(-5; 27)$; в) $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$; г) $A(0; 3)$, $B(-4; 0)$.

935 ☐ Перечертите таблицу в тетрадь, заполните пустые клетки и найдите x и y:

A	$(0; 0)$	$(x; -3)$		$(a; b)$	$(1; 2)$
B	$(1; 1)$	$(2; -7)$	$(3; 1)$		
$\overrightarrow{AB}$		$(5; y)$	$\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$	$(c; d)$	$(0; 0)$

936 ☐ Перечертите таблицу в тетрадь и, используя формулы для вычисления координат середины M отрезка AB, заполните пустые клетки:

A	$(2; -3)$		$(0; 1)$	$(0; 0)$	$(c; d)$	$(3; 5)$	$(3t+5; 7)$	$(1; 3)$
B	$(-3; 1)$	$(4; 7)$		$(-2; 7)$		$(3; 5)$	$(t+7; -7)$	
M		$(-3; -2)$	$(3; -5)$		$(a; b)$			$(0; 0)$

937 ☐ Даны точки $A(0; 1)$ и $B(5; -3)$. Найдите координаты точек C и D, если известно, что точка B — середина отрезка AC, а точка D — середина отрезка BC.

938 ☐ Найдите длины векторов: а) $\vec{a}(5; 9)$; б) $\vec{b}(-3; 4)$; в) $\vec{c}(-10; -10)$; г) $\vec{d}(10; 17)$; д) $\vec{e}(11; -11)$; е) $\vec{f}(10; 0)$.

939 ☐ Найдите расстояние от точки $M(3; -2)$: а) до оси абсцисс; б) до оси ординат; в) до начала координат.

940 ☐ Найдите расстояние между точками A и B, если: а) $A(2; 7)$, $B(-2; 7)$; б) $A(-5; 1)$, $B(-5; -7)$; в) $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$; г) $A(0; 3)$, $B(-4; 0)$.

941 ☐ Найдите периметр треугольника MNP, если $M(4; 0)$, $N(12; -2)$, $P(5; -9)$.

942 Найдите медиану AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты: $A\,(0;\,1)$, $B\,(1;\,-4)$, $C\,(5;\,2)$.

943 Точки B и C лежат соответственно на положительных полуосях Ox и Oy, а точка A лежит на отрицательной полуоси Ox, причём $OA = a$, $OB = b$, $OC = h$. Найдите стороны AC и BC треугольника ABC.

944 Вершина A параллелограмма $OACB$ лежит на положительной полуоси Ox, вершина B имеет координаты $(b;\,c)$, а $OA = a$. Найдите: а) координаты вершины C; б) сторону AC и диагональ CO.

945 Найдите сторону AC и диагональ OC трапеции $OBCA$ с основаниями $OA = a$ и $BC = d$, если точка A лежит на положительной полуоси Ox, а вершина B имеет координаты $(b;\,c)$.

946 Найдите x, если: а) расстояние между точками $A\,(2;\,3)$ и $B\,(x;\,1)$ равно 2; б) расстояние между точками $M_1\,(-1;\,x)$ и $M_2\,(2x;\,3)$ равно 7.

947 Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите его площадь, если вершины треугольника имеют координаты: а) $A\,(0;\,1)$, $B\,(1;\,-4)$, $C\,(5;\,2)$; б) $A\,(-4;\,1)$, $B\,(-2;\,4)$, $C\,(0;\,1)$.

948 На оси ординат найдите точку, равноудалённую от точек:
а) $A\,(-3;\,5)$ и $B\,(6;\,4)$; б) $C\,(4;\,-3)$ и $D\,(8;\,1)$.

949 На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек: а) $A\,(1;\,2)$ и $B\,(-3;\,4)$; б) $C\,(1;\,1)$ и $D\,(3;\,5)$.

950 Докажите, что четырёхугольник $MNPQ$ является параллелограммом, и найдите его диагонали, если:
а) $M\,(1;\,1)$, $N\,(6;\,1)$, $P\,(7;\,4)$, $Q\,(2;\,4)$;
б) $M\,(-5;\,1)$, $N\,(-4;\,4)$, $P\,(-1;\,5)$, $Q\,(-2;\,2)$.

951 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является прямоугольником, и найдите его площадь, если:
а) $A\,(-3;\,-1)$, $B\,(1;\,-1)$, $C\,(1;\,-3)$, $D\,(-3;\,-3)$;
б) $A\,(4;\,1)$, $B\,(3;\,5)$, $C\,(-1;\,4)$, $D\,(0;\,0)$.

Применение метода координат к решению задач

Формулы координат середины отрезка и расстояния между двумя точками можно использовать для решения более сложных геометрических задач. С этой целью следует ввести прямоугольную систему координат и записать условия задачи в координатах. После этого решение задачи проводится с помощью алгебраических вычислений.

952 Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин.

Решение

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Обозначим буквой M середину гипотенузы AB.

Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 282. Если $BC = a$, $AC = b$, то вершины треугольника имеют координаты $C(0; 0)$, $B(a; 0)$, $A(0; b)$. По формулам координат середины отрезка находим координаты точки M:

$$M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right).$$

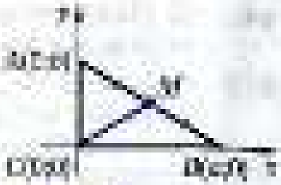


Рис. 282

Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, найдём длины отрезков MC и MA:

$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$MA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, $MA = MB = MC$, что и требовалось доказать.

983 Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

Решение

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 283. Если $AD = BC = a$, а точка B имеет координаты $(b; c)$, то точка D имеет координаты $(a; 0)$, а точка C — координаты $(a + b; c)$. Используя формулу расстояния между двумя точками, находим:

Рис. 283

$$AB^2 = b^2 + c^2,\ AD^2 = a^2,\ AC^2 = (a + b)^2 + c^2,\ BD^2 = (a - b)^2 + c^2.$$

Отсюда получаем:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\,(AB^2 + AD^2) = 2\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$AC^2 + BD^2 = (a + b)^2 + c^2 + (a - b)^2 + c^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

Таким образом,

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2,$$

что и требовалось доказать.

984 Медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника.

985 Высота треугольника, равная 10 см, делит основание на два отрезка, равные 10 см и 4 см. Найдите медиану, проведённую к меньшей из двух других сторон.

986 Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

967 Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником.

968 Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M плоскости справедливо равенство

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2.$$

§3 Уравнения окружности и прямой

93 Уравнение линии на плоскости

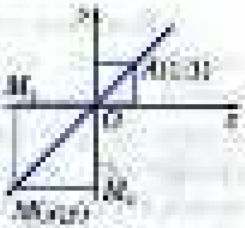


Рис. 284

При изучении алгебры мы строили графики некоторых функций в прямоугольной системе координат, например график функции $y = x$. Известно, что графиком этой функции является прямая, проходящая через точки $O(0; 0)$ и $A(1; 1)$ (рис. 284). Координаты любой точки $M(x; y)$, лежащей на прямой OA, удовлетворяют уравнению $y = x$ (так как $MM_1 = MM_2$), а координаты любой точки, не лежащей на прямой OA, этому уравнению не удовлетворяют. Говорят, что уравнение $y = x$ является уравнением прямой OA. Введём теперь понятие уравнения произвольной линии.

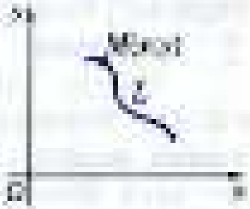


Рис. 285

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy и дана некоторая линия L (рис. 285). Уравнение с двумя переменными x и y называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

При изучении линий методом координат возникают две задачи: 1) по геометрическим свойствам данной линии найти её уравнение; 2) обратная задача: по заданному уравнению линии исследовать её геометрические свойства. В следующем пункте мы рассмотрим первую из этих задач применительно к окружности. Вторая задача рассматривалась в курсе алгебры при построении графиков функций.

94 Уравнение окружности

Выведем уравнение окружности радиуса r с центром C в заданной прямоугольной системе координат. Пусть точка C имеет координаты $(x_0; y_0)$ (рис. 286). Расстояние от произвольной точки $M\ (x; y)$ до точки C вычисляется по формуле $MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Если точка M лежит на данной окружности, то $MC = r$, $MC^2 = r^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Рис. 286

Если же точка $M\ (x; y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq r^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, в прямоугольной системе координат **уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C\ (x_0; y_0)$ имеет вид:**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В частности, уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Задача

Найти уравнение окружности с центром в точке $(-3; 4)$, проходящей через начало координат.

Решение

Центр окружности имеет координаты $(-3; 4)$. Поэтому уравнение этой окружности можно записать в виде $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$, где r — пока неизвестный радиус окружности. Найдём его. Для этого воспользуемся тем, что окружность проходит через начало координат, т. е. координаты точки $O\ (0; 0)$ удовлетворяют этому уравнению: $(0 + 3)^2 + (0 - 4)^2 = r^2$. Отсюда $r^2 = 25$, и, значит, $r = 5$. Итак, искомое уравнение окружности имеет вид $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$, которое также является уравнением данной окружности.

95 Уравнение прямой

Выведем уравнение данной прямой l в заданной прямоугольной системе координат. Отметим две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ так, чтобы прямая l была серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 287, а). Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой l, то $AM = BM$, или $AM^2 = BM^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \quad (2)$$

Если же точка $M(x; y)$ не лежит на прямой l, то $AM^2 \neq BM^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (2). Следовательно, уравнение (2) является уравнением прямой l в заданной системе координат. После возведения выражений в скобках в квадрат и приведения подобных членов уравнение (2) принимает вид

$$ax + by + c = 0, \quad (3)$$

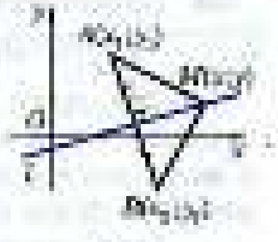
где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$. Так как $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — различные точки, то хотя бы одна из разностей $(x_1 - x_2)$ и $(y_1 - y_2)$ не равна нулю, т. е. хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля. **Таким образом, уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.**

Если в уравнении (3) коэффициент b отличен от нуля, то это уравнение можно записать так:

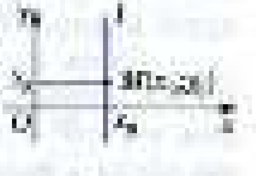
$$y = kx + d,$$

где $k = -\frac{a}{b}$, $d = -\frac{c}{b}$. Число k называется **угловым коэффициентом прямой**, заданной этим уравнением. Докажите самостоятельно, что:

две параллельные прямые, не параллельные оси Oy, имеют одинаковые угловые коэффициенты; если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.



а)



б)

Рис. 287

Выведем уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельной оси Oy (рис. 287, б). Абсцисса любой точки $M(x; y)$ прямой l равна x_0, т. е. координаты любой точки $M(x; y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $x = x_0$. В то же время координаты любой точки, не лежащей на прямой l, этому уравнению не удовлетворяют. Следовательно, уравнение $x = x_0$ является уравнением прямой l.

Ясно, что ось Ox имеет уравнение $y = 0$, а ось Oy — уравнение $x = 0$.

96 Взаимное расположение двух окружностей

Исследуем взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов r, R и расстояния d между их центрами. Для определённости будем считать, что $r \leq R$.

Если центры окружностей совпадают, т. е. $d = 0$, то окружности называются концентрическими, и окружность радиуса r лежит внутри круга радиуса R (рис. 288, а).

Пусть $d > 0$. Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы точка O была центром первой окружности, а точка с координатами $(d; 0)$ — центром второй окружности. В этой системе координат уравнения первой и второй окружностей имеют вид

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (x - d)^2 + y^2 = r^2. \qquad (4)$$

Если система уравнений (4) имеет решением пару чисел $x = x_0$, $y = y_0$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ является общей точкой данных окружностей (рис. 288, б), и обратно: если $M_0(x_0; y_0)$ — общая точка данных окружностей, то пара чисел $x = x_0$, $y = y_0$ является решением системы уравнений (4).

Пусть система (4) имеет решением пару чисел $x = x_0$, $y = y_0$, т. е. справедливы числовые равенства

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2, \quad (x_0 - d)^2 + y_0^2 = r^2. \qquad (5)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим равенство $2x_0 d - d^2 = R^2 - r^2$, откуда

$$x_0 = \frac{1}{2d}(R^2 + d^2 - r^2). \qquad (6)$$

Заметим, что $x_0 > 0$, поскольку $R \geqslant r$ и $d > 0$. Кроме того, как следует из первого равенства (5), $x_0 = \sqrt{R^2 - y_0^2} \leqslant R$, т. е. для величин R, r и d должно выполняться неравенство $\frac{1}{2d}(R^2 + d^2 - r^2) \leqslant R$ или $R^2 + d^2 - r^2 \leqslant 2dR$. Последнее неравенство запишем в виде $(d - R)^2 \leqslant r^2$. Отсюда следует, что $-r \leqslant d - R \leqslant r$, или

$$R - r \leqslant d \leqslant R + r. \qquad (7)$$

Отметим, что $x_0 = R$, если $d = R - r$ или $d = R + r$, и $x_0 < R$, если $R - r < d < R + r$.

Итак, если система уравнений (4) имеет решение, то величина d удовлетворяет неравенствам (7). Поэтому, если не выполнено какое-то из неравенств (7), то система (4) не имеет решений и, следовательно, данные окружности не имеют общих точек. Так будет в двух случаях:

1) $d < R - r$, т. е. $d + r < R$ (рис. 288, в). В этом случае окружность радиуса r лежит внутри круга радиуса R. Говорят также, что **одна окружность лежит внутри другой.**

2) $d > R + r$ (рис. 288, г). В этом случае говорят, что **одна окружность лежит вне другой.**

Если неравенства (7) выполнены, то возможны три случая:

3) $d = R - r$, при этом $R > r$, поскольку $d > 0$. Как уже было отмечено, в этом случае $x_0 = R$, поэтому из первого из равенств (5) следует, что $y_0 = 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что пара чисел $x = R$, $y = 0$ есть решение системы (4). Таким образом, в данном случае окружности имеют ровно одну общую точку, а их взаимное расположение изображено на рисунке 288, д. Говорят, что **окружности касаются изнутри.**

Рис. 288

4) $d = R - r$. В этом случае также $x_0 = R$, поэтому $y_0 = 0$, и непосредственно проверяется, что пара чисел $x = R$, $y = 0$ есть решение системы (4). Таким образом, в данном случае, как и в случае 3, окружности имеют ровно одну общую точку, но их взаимное расположение иное (рис. 288, г). Говорят, что окружности касаются изнутри.

5) $R - r < d < R + r$. Как уже было отмечено, в этом случае число x_0, определённое равенством (6), удовлетворяет неравенству $x_0 < R$, поэтому из первого равенства (5) получаем два значения y_0: $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ и $y_0 = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Нетрудно убедиться в том, что система (4) имеет в данном случае два решения: $x = x_0$, $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ и $x = x_0$, $y = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Следовательно, окружности пересекаются в двух точках (см. рис. 288, д).

Таким образом, если $d \neq 0$, то возможны пять случаев взаимного расположения двух окружностей (см. рис. 288, а—д).

Задачи

959 Начертите окружность, заданную уравнением:
а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$; в) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$; г) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; д) $x^2 + (y+2)^2 = 2$.

960 Какие из точек $A(3; -4)$, $B(1; 0)$, $C(0; 5)$, $D(0; 0)$ и $E(0; 1)$ лежат на окружности, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$; в) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$?

961 Окружность задана уравнением $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 16$. Не пользуясь чертежом, укажите, какие из точек $A(-2; 4)$, $B(-5; -3)$, $C(-7; -2)$ и $D(1; 5)$ лежат:
а) внутри круга, ограниченного данной окружностью;
б) на окружности;
в) вне круга, ограниченного данной окружностью.

962 Даны окружность $x^2 + y^2 = 25$ и две точки $A(3; 4)$ и $B(4; -3)$. Докажите, что AB — хорда данной окружности.

963 На окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, найдите точки: а) с абсциссой -4; б) с ординатой 3.

964 ▫ На окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y-5)^2=25$, найдите точки: а) с абсциссой 3; б) с ординатой 5.

965 Напишите уравнения окружностей с центром в начале координат и радиусами $r_1=3$, $r_2=\sqrt{2}$, $r_3=\frac{5}{2}$.

966 Напишите уравнение окружности радиуса r с центром A, если: а) $A(0;5)$, $r=3$; б) $A(-1;2)$, $r=2$; в) $A(-3;-7)$, $r=\frac{1}{2}$; г) $A(4;-3)$, $r=10$.

967 ▫ Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $B(-1;3)$.

968 ▫ Напишите уравнение окружности с центром в точке $A(0;6)$, проходящей через точку $B(-3;2)$.

969 Напишите уравнение окружности с диаметром MN, если: а) $M(-3;5)$, $N(7;-3)$; б) $M(2;-1)$, $N(4;3)$.

970 Напишите уравнение окружности, проходящей через точку $A(1;3)$, если известно, что центр окружности лежит на оси абсцисс, а радиус равен 5. Сколько существует таких окружностей?

971 Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(-3;0)$ и $B(0;9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат.

972 Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки: а) $A(1;-1)$ и $B(-3;2)$; б) $C(2;5)$ и $D(5;2)$; в) $M(0;1)$ и $N(-4;-5)$.

Решение

а) Уравнение прямой AB имеет вид $ax+by+c=0$. Так как точки A и B лежат на прямой AB, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$a\cdot 1+b\cdot(-1)+c=0,\quad a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0,$$
$$\text{или}\quad a-b+c=0,\quad -3a+2b+c=0.$$

Из этих уравнений выразим коэффициенты a и b через c: $a=3c$, $b=4c$. Подставив эти значения в уравнение прямой, получим $3cx+4cy+c=0$. При любом $c\neq 0$ это уравнение является уравнением прямой AB. Сократив на c, запишем искомое уравнение в виде $3x+4y+1=0$.

973 ▫ Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Напишите уравнение прямой, содержащей медиану CM.

974 ▫ Даны координаты вершин трапеции $ABCD$: $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$ и $D(3;1)$. Напишите уравнения прямых, содержащих: а) диагонали AC и BD трапеции; б) среднюю линию трапеции.

975 Найдите координаты точек пересечения прямой $3x - 4y + 12 = 0$ с осями координат. Начертите эту прямую.

976 Найдите координаты точки пересечения прямых $4x + 3y - 6 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$.

977 Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $M\ (2;\ 5)$ и параллельных осям координат.

978 Начертите прямую, заданную уравнением: а) $y = 3$; б) $x = -2$; в) $y = -4$; г) $x = 7$.

979 Найдите ординату точки M, лежащей на прямой AB, если известно, что $A\ (-8;\ -6)$, $B\ (-3;\ -1)$ и абсцисса точки M равна 5.

980 Напишите уравнения прямых, содержащих стороны ромба, диагонали которого равны 10 см и 4 см, если известно, что его диагонали лежат на осях координат.

Использование уравнений окружности и прямой при решении задач

981 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек, для каждой из которых расстояние от точки A в два раза больше расстояния от точки B.

Решение

Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 289, *а*. Тогда точки A и B имеют координаты $A\ (0;\ 0)$, $B\ (a;\ 0)$, где $a = AB$.

Найдём расстояния от произвольной точки $M\ (x;\ y)$ до точек A и B:

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$BM = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Если точка $M\ (x;\ y)$ принадлежит искомому множеству, то

$$AM = 2BM, \text{ или } AM^2 = 4BM^2.$$

Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = 4\left((x - a)^2 + y^2\right). \qquad (6)$$

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению.

Следовательно, уравнение (6) и есть уравнение искомого множества точек в выбранной системе

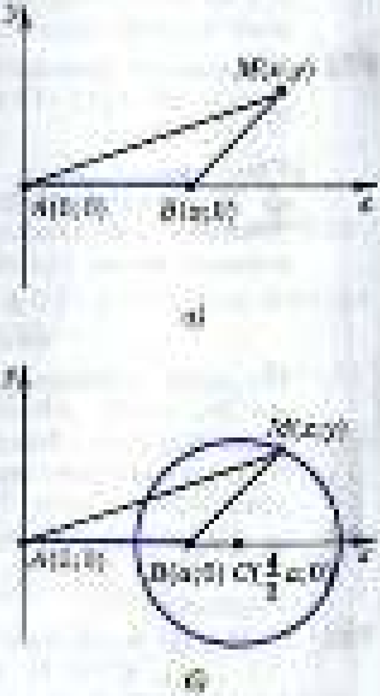


Рис. 289

координат. Раскрывая скобки и группируя слагаемые соответствующим образом, приводим уравнение (8) к виду

$$\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2.$$

Таким образом, искомым множеством точек является окружность радиуса $\frac{2}{3}a$ с центром в точке $C\left(\frac{4}{3}a; 0\right)$. Эта окружность изображена на рисунке 289, *а*.

Замечание

Аналогично можно доказать, что множеством всех точек M, удовлетворяющих условию $AM=kBM$, где k — данное положительное число, не равное единице, является окружность радиуса $\frac{ka}{|k^2-1|}$ с центром в точке $\left(\frac{k^2a}{k^2-1}; 0\right)$.

Эти окружности, соответствующие различным значениям $k\neq 1$, называют окружностями Аполлония, поскольку они рассматривались ещё древнегреческим математиком Аполлонием в его трактате «О кругах» во II в. до н. э.

Если $k=1$, то задача сводится к известной нам задаче о нахождении множества всех точек, равноудалённых от точек A и B. Таким множеством, как мы знаем, является серединный перпендикуляр к отрезку AB.

982 Точка B — середина отрезка AC, длина которого равна 2. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: а) $AM^2+BM^2+CM^2=50$; б) $AM^2+2BM^2+3CM^2=4$.

983 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2+BM^2=k^2$, где k — данное число.

984 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2-BM^2=k$, где k — данное число.

Решение

Введём прямоугольную систему координат так, чтобы точка A была началом координат, а точка B имела координаты $(a; 0)$, где $a=AB$. Найдём расстояния от произвольной точки $M(x; y)$ до точек A и B: $AM=\sqrt{x^2+y^2}$, $BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

Если точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM^2-BM^2=k$, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению $x^2+y^2-(x-a)^2-y^2=k$, или $2ax-a^2-k=0$.

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению. Итак, полученное уравнение является уравнением искомого множества точек. Но этим уравнением определяется прямая, параллельная оси Oy, если $a^2+k\neq 0$, и сама ось Oy, если $a^2+k=0$. Таким образом, искомым множеством точек является прямая, перпендикулярная к прямой AB.

995 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $BM^2 - AM^2 = 2AB^2$.

996 Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$(AM^2 + DM^2) - (BM^2 + CM^2) = 2AB^2.$$

997* Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны $2a$ и $2b$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$AM^2 + DM^2 = BM^2 + CM^2.$$

Вопросы для повторения к главе X

1 Сформулируйте и докажите лемму о коллинеарных векторах.

2 Что значит разложить вектор по двум данным векторам?

3 Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

4 Объясните, как вводится прямоугольная система координат.

5 Что такое координатные векторы?

6 Сформулируйте и докажите утверждение о разложении произвольного вектора по координатным векторам.

7 Что такое координаты вектора? Чему равны координаты координатных векторов? Как связаны между собой координаты равных векторов?

8 Сформулируйте и докажите правила нахождения координат суммы и разности векторов, а также произведения вектора на число по заданным координатам векторов.

9 Что такое радиус-вектор точки? Докажите, что координаты точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

10 Выведите формулы для вычисления координат вектора по координатам его начала и конца.

11 Выведите формулы для вычисления координат середины отрезка по координатам его концов.

12 Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.

13 Выведите формулу для вычисления расстояния между двумя точками по их координатам.

14 Приведите пример решения геометрической задачи с применением метода координат.

15 Какое уравнение называется уравнением данной линии? Приведите пример.

16 Выведите уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке.

17 Напишите уравнение окружности данного радиуса с центром в начале координат.

18 Выведите уравнение данной прямой в прямоугольной системе координат.

19 Что такое угловой коэффициент прямой?

20 Докажите, что: две параллельные прямые, не параллельные оси Oy, имеют одинаковые угловые коэффициенты; если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.

21 Напишите уравнения прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельных осям координат.

22 Напишите уравнения осей координат.

23 Исследуйте взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов и расстояния между их центрами. Сформулируйте полученные выводы.

24 Приведите примеры использования уравнений окружности и прямой при решении геометрических задач.

Дополнительные задачи

988 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите такое число x (если это возможно), чтобы векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ были коллинеарны:

а) $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$;

б) $\vec{p}=x\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$;

в) $\vec{p}=\vec{a}+x\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$;

г) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=x\vec{a}+\vec{b}$.

989 Найдите координаты вектора $\vec{p}$ и его длину, если:

а) $\vec{p}=7\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{1; -1\}$, $\vec{b}\{5; -2\}$;

б) $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}\{6; 3\}$, $\vec{b}\{5; 4\}$;

в) $\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{a}\left\{\frac{8}{5}; \frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}\{6; -1\}$;

г) $\vec{p}=3(-2\vec{a}-4\vec{b})$, $\vec{a}\{1; 0\}$, $\vec{b}\{-1; -1\}$.

990 Даны векторы $\vec{a}\{3; 4\}$, $\vec{b}\{6; -3\}$, $\vec{c}\{1; 3\}$.

а) Найдите координаты векторов $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{r}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{s}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

б) Найдите $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$.

991 Докажите, что расстояние между любыми двумя точками $M_1(x_1; 0)$ и $M_2(x_2; 0)$ оси абсцисс вычисляется по формуле $d=|x_1-x_2|$.

992 Докажите, что треугольник ABC, вершины которого имеют координаты $A\,(4; 8)$, $B\,(12; 11)$, $C\,(7; 0)$, является равнобедренным, но не равносторонним.

993 Докажите, что углы A и C треугольника ABC равны, если $A\,(-5; 6)$, $B\,(3; -9)$ и $C\,(-12; -17)$.

994 Докажите, что точка D равноудалена от точек A, B и C, если:
а) $D\,(1; 1)$, $A\,(5; 4)$, $B\,(4; -3)$, $C\,(-2; 5)$;
б) $D\,(1; 0)$, $A\,(7; -8)$, $B\,(-5; 8)$, $C\,(9; 6)$.

995 На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек $M_1\,(-2; 4)$ и $M_2\,(6; 8)$.

996 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A\,(-5; 13)$, $B\,(3; 5)$, $C\,(-3; -1)$. Найдите: а) координаты середин сторон треугольника; б) медиану, проведённую к стороне AC; в) средние линии треугольника.

997 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A\,(3; 2)$, $B\,(0; 5)$, $C\,(-3; 2)$, $D\,(0; -1)$, является квадратом.

998 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A\,(-2; -3)$, $B\,(1; 4)$, $C\,(8; 7)$, $D\,(5; 0)$, является ромбом. Найдите его площадь.

999 Найдите координаты четвёртой вершины параллелограмма по заданным координатам трёх его вершин: $(-4; 4)$, $(-6; 1)$ и $(-1; 5)$. Сколько решений имеет задача?

1000 Выясните, какие из данных уравнений являются уравнениями окружности. Найдите координаты центра и радиус каждой окружности:
а) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;
б) $x^2+(y+7)^2=1$;
в) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$;
г) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
д) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

1001 Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A\,(3; 0)$ и $B\,(-1; 2)$, если центр её лежит на прямой $y=x+2$.

1002 Напишите уравнение окружности, проходящей через три данные точки:
а) $A\,(1; -4)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(3; -2)$;
б) $A\,(3; -7)$, $B\,(8; -2)$, $C\,(6; 2)$.

1003 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A\,(-7; 5)$, $B\,(3; -1)$, $C\,(5; 3)$. Составьте уравнения: а) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; б) прямых AB, BC и CA; в) прямых, на которых лежат средние линии треугольника.

1004 Докажите, что прямые, заданные уравнениями $3x-1{,}5y+1=0$ и $2x-y-3=0$, параллельны.

1005 Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, если: а) $A(-2; 0)$, $B\left(3; 2\frac{1}{2}\right)$, $C(6; 4)$; б) $A(3; 10)$, $B(3; 12)$, $C(3; -6)$; в) $A(1; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-10; -31)$.

Применение метода координат к решению задач

1006 Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а высота, проведённая к большей из них, равна 15 см. Найдите медианы треугольника.

1007 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

1008 Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для всех точек M величина $(AM^2 + CM^2) - (BM^2 + DM^2)$ имеет одно и то же значение.

1009 Докажите, что медиану AA_1 треугольника ABC можно вычислить по формуле $AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}$. Используя эту формулу, докажите, что если две медианы треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

1010 **Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых:**
а) $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$; б) $2AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

Глава XI

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

В этой главе получит дальнейшее развитие тригонометрический аппарат геометрии — синус, косинус, тангенс и котангенс будут определены для углов от 0° до 180°. Это даст возможность вывести формулы, связывающие между собой стороны и углы произвольного треугольника. Утверждения об этих формулах называются теоремой синусов и теоремой косинусов. Они широко используются как в самой геометрии, так и в её приложениях, в частности при проведении измерительных работ на местности. Кроме того, в этой главе вводится ещё одно действие над векторами — скалярное умножение векторов. С одной стороны, оно расширяет наши возможности в применении координатно-векторного метода при решении геометрических задач, а с другой — используется в физике для описания физических величин.

§ 1 Синус, косинус, тангенс, котангенс угла

97 Синус, косинус, тангенс, котангенс

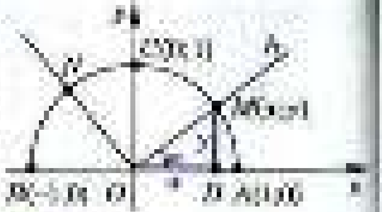


Рис. 290

Введём прямоугольную систему координат Oxy и построим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, расположенную в первом и втором квадрантах (рис. 290). Назовём её **единичной полуокружностью**. Из точки O проведём луч h, пересекающий единичную полуокружность в точке $M(x; y)$. Обозначим буквой α угол между лучом h и положительной полуосью абсцисс (если луч h совпадает с положительной полуосью абсцисс, то будем считать, что $\alpha = 0°$).

Если угол α острый, то из прямоугольного треугольника DOM (см. рис. 290) имеем

$$\sin\alpha = \frac{MD}{OM}, \quad \cos\alpha = \frac{OD}{OM}.$$

Но $OM = 1$, $MD = y$, $OD = x$, поэтому

$$\sin\alpha = y,\quad \cos\alpha = x. \qquad (1)$$

Итак, синус острого угла α равен ординате y точки M, а косинус угла α — абсциссе x точки M. Если угол α прямой, тупой или развёрнутый (углы AOC, AON и AOB на рисунке 290) или $\alpha = 0°$, то синус и косинус угла α также определим по формулам (1). Таким образом, для любого угла α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ **синусом угла α называется ордината y точки M, а косинусом угла α — абсцисса x точки M.** Так как координаты $(x; y)$ точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,\quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Найдём значения синуса и косинуса для углов $0°$, $90°$ и $180°$. Для этого рассмотрим лучи OA, OC и OB, соответствующие этим углам (см. рис. 290). Так как точки A, C и B имеют координаты $A(1; 0)$, $C(0; 1)$, $B(-1; 0)$, то

$$\begin{aligned} &\sin 0° = 0,\ \sin 90° = 1,\ \sin 180° = 0,\\ &\cos 0° = 1,\ \cos 90° = 0,\ \cos 180° = -1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Тангенсом угла α ($\alpha \neq 90°$) называется отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

При $\alpha = 90°$ $\operatorname{tg}\alpha$ не определён, поскольку $\cos 90° = 0$, и в формуле (3) знаменатель обращается в нуль. Используя формулы (2), находим: $\operatorname{tg} 0° = 0$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

Котангенсом угла α ($0° < \alpha < 180°$) называется отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Котангенс угла α обозначается символом $\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

При $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$ $\operatorname{ctg} \alpha$ не определён. Исходя из формул (3), получаем: $\operatorname{ctg} 90° = 0$.

98 Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения

На рисунке 290 изображены система координат Oxy и единичная полуокружность ACB с центром O. Эта полуокружность является дугой окружности, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Подставив сюда выражения для x и y из формул (1), получим равенство

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad (4)$$

которое выполняется для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Равенство (4) называется **основным тригонометрическим тождеством**. В 7 классе оно было доказано для острых углов.

Справедливы также следующие тождества:

$$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$$

при $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$,

$$\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$$

при $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Они называются **формулами приведения** и доказываются в курсе алгебры.

99 Формулы для вычисления координат точки

Пусть задана система координат Oxy и дана произвольная точка $A(x; y)$ с неотрицательной ординатой y (рис. 291). Выразим координаты точки A через длину отрезка OA и угол α между лучом OA и положительной полуосью Ox. Для этого обозначим буквой M точку пересечения луча OA с единичной полуокружностью. По формулам (1) координаты точки M соответственно равны $\cos \alpha$, $\sin \alpha$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка M, т. е. $\overrightarrow{OM} \{\cos \alpha; \sin \alpha\}$. Вектор $\overrightarrow{OA}$ имеет те же координаты, что и точ-

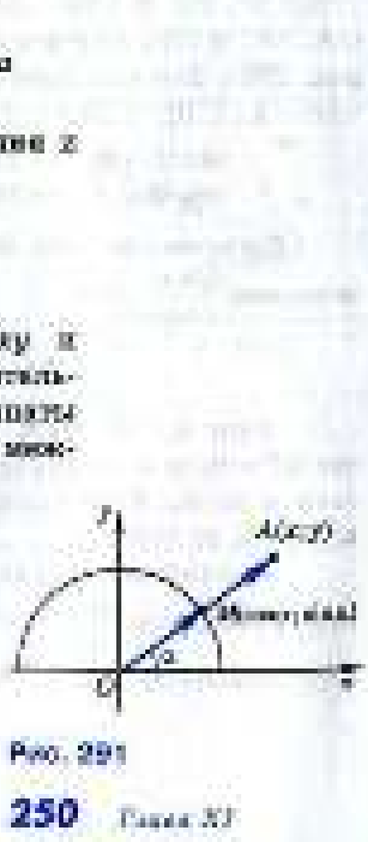


Рис. 291

...A, т. е. $\overrightarrow{OA}\{x; y\}$. Но $\overrightarrow{OA} = OA \cdot \overrightarrow{OM}$ (объясните почему), поэтому

$$x = OA \cdot \cos\alpha, \quad y = OA \cdot \sin\alpha.$$

Задачи

1011 Ответьте на вопросы: а) Может ли абсцисса точки единичной полуокружности иметь значения $0{,}3$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$; $-2{,}8$? б) Может ли ордината точки единичной полуокружности иметь значения $0{,}6$; $\frac{1}{7}$; $-0{,}3$; 7; $1{,}002$? Ответы обоснуйте.

1012 Проверьте, что точки $M_1(0; 1)$, $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ лежат на единичной полуокружности. Выпишите значения синуса, косинуса и тангенса углов AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB.

1013 Найдите $\sin\alpha$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha = -1$.

1014 Найдите $\cos\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha = 0$.

1015 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если:

а) $\cos\alpha = 1$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0° < \alpha < 90°$; г) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$.

1016 Вычислите синусы, косинусы и тангенсы углов $120°$, $135°$, $150°$.

1017 Постройте $\angle A$, если:

а) $\sin A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{3}{4}$; в) $\cos A = -\frac{2}{5}$.

1018 Угол между лучом OA, пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью Ox равен α. Найдите координаты точки A, если:

а) $OA = 3$, $\alpha = 45°$; б) $OA = 1{,}5$, $\alpha = 90°$; в) $OA = 5$, $\alpha = 150°$; г) $OA = 1$, $\alpha = 180°$; д) $OA = 2$, $\alpha = 30°$.

1019 Найдите угол между лучом OA и положительной полуосью Ox, если точка A имеет координаты:

а) $(2; 2)$; б) $(0; 3)$; в) $(-\sqrt{3}; 1)$; г) $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

§2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

100 Теорема о площади треугольника

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $BC = a$, $CA = b$ и S — площадь этого треугольника. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Введём систему координат с началом в точке C так, чтобы точка B лежала на положительной полуоси Cx, а точка A имела положительную ординату (рис. 292). Площадь данного треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}ah$, где h — высота треугольника. Но h равна ординате точки A, т. е. $h = b\sin C$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$. **Теорема доказана.**

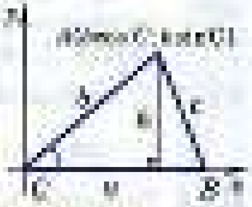


Рис. 292

101 Теорема синусов

Теорема

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

По теореме о площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,\ S = \frac{1}{2}bc\sin A,\ S = \frac{1}{2}ca\sin B.$$

Из первых двух равенств получаем: $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$, откуда $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Точно так же из второго и третьего равенств следует, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

Итак, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Теорема доказана.

Замечание

Можно доказать (см. задачу 1033), что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

102 Теорема косинусов

Теорема

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, например, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \qquad (1)$$

Введём систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 293. Тогда точка B будет иметь координаты $(c; 0)$, а точка C — координаты $(b\cos A; b\sin A)$. По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A =$$
$$= b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2 =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Теорема доказана.

Рис. 293

Теорему косинусов называют иногда обобщённой теоремой Пифагора. Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. В самом деле, если в треугольнике ABC угол A прямой, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ и по формуле (1) получаем

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

т. е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

103 Решение треугольников

Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (т. е. трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам, определяющим треугольник.

Рассмотрим три задачи на решение треугольника. При этом будем пользоваться такими обозначениями для сторон треугольника ABC: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Задача 1

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Дано: a, b, $\angle C$. Найти: c, $\angle A$, $\angle B$.

Решение

1. По теореме косинусов находим c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

2. Пользуясь теоремой косинусов, имеем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице.

3. $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$.

Задача 2

Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам

Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Найти: $\angle A$, b, c.

Решение

1. $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$.

2. С помощью теоремы синусов вычисляем b и c:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A},\ c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Задача 3

Решение треугольника по трём сторонам

Дано: a, b и c. Найти: $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Решение

1. По теореме косинусов получаем:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице.

2. Аналогично находим угол B.

3. $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$.

Пример

Футбольный мяч находится в точке A футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований B и C стоек ворот (рис. 294). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

Решение

Рассмотрим треугольник ABC, вершинами которого являются точка A расположения мяча и точки B и C в основаниях стоек ворот. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м и $a = BC = 7$ м. Эти данные позволяют решить треугольник ABC и найти угол α, равный углу A (см. задачу 3). С помощью теоремы косинусов определяем $\cos A$:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{24^2+23^2-7^2}{2\cdot 24\cdot 23}.$$

Угол α находим по таблице: $\alpha = 16^\circ 57'$.

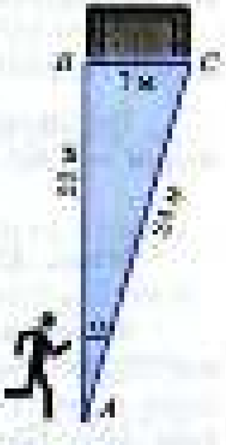


Рис. 294

104 Измерительные работы

Тригонометрические формулы используются при проведении различных измерительных работ на местности.

Измерение высоты предмета. Предположим, что требуется определить высоту AH какого-то предмета (рис. 295). Для этого отметим точку B на определённом расстоянии a от основания H предмета и измерим угол ABH: $\angle ABH = \alpha$. По этим данным из прямоугольного треугольника AHB находим высоту предмета: $AH = a \operatorname{tg} \alpha$.

Рис. 295

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание H предмета, отметим две точки B и C на определённом расстоянии a друг от друга и измерим углы ABH и ACB: $\angle ABH = \alpha$ и $\angle ACB = \beta$ (см. рис. 295). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника ABC, в частности AB. В самом деле, $\angle ABH$ — внешний угол треугольника ABC, поэтому $\angle A = \alpha - \beta$. Используя теорему синусов, находим AB:

$$AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Из прямоугольного треугольника ABH находим высоту AH предмета:

$$AH = AB \cdot \sin \alpha.$$

Итак, $AH = \dfrac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

Измерение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 296). Напомним, что эту задачу мы уже решали в 8 классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи — с использованием формул тригонометрии.

На местности выберем точку B и измерим длину c отрезка AB. Затем измерим, например с помощью астролябии, углы A и B: $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Эти данные, т. е. c, α и β, позволяют решить треугольник ABC и найти искомое расстояние $d = AC$.

Сначала находим $\angle C$ и $\sin C$:

$$\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

$$\sin C = \sin (180^\circ - \alpha - \beta) = \sin (\alpha + \beta).$$

Затем с помощью теоремы синусов находим d. Так как $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$, $AC = d$, $AB = c$, $\angle B = \beta$, то $d = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$.

Аналогичным образом по так называемому параллаксу небесных светил определяют расстояния до этих светил.

Рис. 295

Задачи

1020 ❑ Найдите площадь треугольника ABC, если: а) $AB = 6\sqrt{8}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60^\circ$; б) $BC = 3$ см, $AB = 18\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$; в) $AC = 14$ см, $CB = 7$ см, $\angle C = 48^\circ$.

1021 Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

1022 ❑ Площадь треугольника ABC равна 60 см². Найдите сторону AB, если $AC = 15$ см, $\angle A = 30^\circ$.

1023 ❑ Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 10 см, а угол между диагоналями равен 30°.

1024 Найдите площадь треугольника ABC, если:
а) $\angle A = \alpha$, а высоты, проведённые из вершин B и C, соответственно равны h_b и h_c;
б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а высота, проведённая из вершины B, равна h.

1025 ❑ С помощью теорем синусов и косинусов решите треугольник ABC, если:
а) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $c = 14$; б) $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, $b = 4{,}5$;
в) $\angle A = 80^\circ$, $a = 16$, $b = 10$; г) $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $a = 24{,}6$;
д) $\angle A = 60^\circ$, $a = 10$, $b = 7$; е) $a = 6{,}3$, $b = 6{,}3$, $\angle C = 54^\circ$;
ж) $b = 32$, $c = 45$, $\angle A = 87^\circ$; з) $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$;
и) $a = 6$, $b = 7{,}3$, $c = 4{,}8$.

1026 ❑ В треугольнике ABC $AC = 12$ см, $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Найдите AB и S_{ABC}.

1027 ❑ Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, а высота AD равна 3 м.

1028 □ В параллелограмме $ABCD$ $AD = 7\frac{1}{3}$ м, $BD = 4{,}4$ м, $\angle A = 22^\circ 30'$. Найдите $\angle BDC$ и $\angle DBC$.

1029 Найдите биссектрисы треугольника, если одна из его сторон равна a, а прилежащие к этой стороне углы равны α и β.

1030 Смежные стороны параллелограмма равны a и b, а один из его углов равен α. Найдите диагонали параллелограмма и угол между ними.

1031 □ Выясните, является ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если его стороны равны: а) 5, 4 и 4; б) 17, 8 и 15; в) 9, 5 и 6.

1032 □ Две равные по величине силы приложены к одной точке под углом 72° друг к другу. Найдите величину этих сил, если величина их равнодействующей равна 120 кг.

1033 Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

Решение

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, или $BC = 2R \sin A$.

Проведём диаметр BA_1 (рис. 297) и рассмотрим треугольник A_1BC (случай, когда точки A_1 и C совпадают, рассмотрите самостоятельно). Угол C этого треугольника прямой, поэтому $BC = BA_1 \cdot \sin A_1$. Но $\sin A_1 = \sin A$. Действительно, если точка A_1 лежит на дуге BAC (рис. 297, *а*), то $\angle A_1 = \angle A$, а если на дуге BDC (рис. 297, *б*), то $\angle A_1 = 180^\circ - \angle A$. И в том, и в другом случае $\sin A_1 = \sin A$. Следовательно,

$$BC = BA_1 \cdot \sin A, \text{ или } BC = 2R \sin A.$$

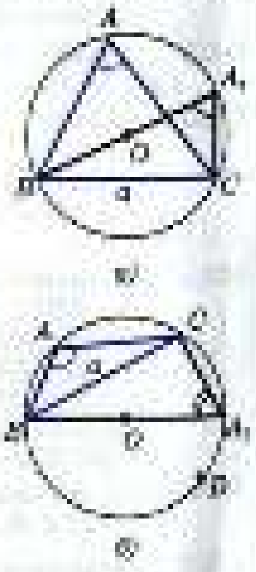


Рис. 297

1034 □ В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, большее основание равно 10 см, а угол при основании равен 70°. Найдите периметр трапеции.

1035 В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке E. Найдите острый угол между этими хордами, если $AB = 13$ см, $CE = 9$ см, $ED = 4$ см и расстояние между точками B и D равно $4\sqrt{3}$ см.

1036 □ Наблюдатель находится на расстоянии 50 м от башни, высоту которой хочет определить (рис. 298). Основание башни он видит под углом 2° к горизонту, а вершину — под углом 45° к горизонту. Какова высота башни?

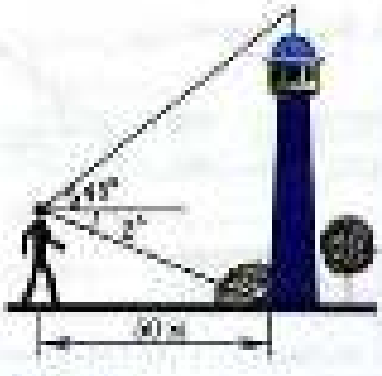


Рис. 298

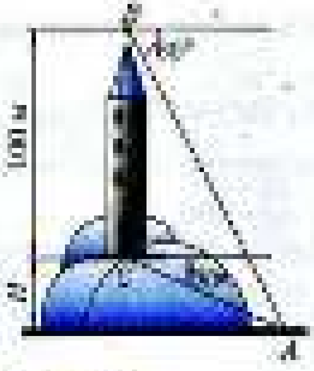


Рис. 299

1037 Для определения ширины реки отметили два пункта A и B на берегу реки на расстоянии 70 м друг от друга и измерили углы CAB и ABC, где C — дерево, стоящее на другом берегу у кромки воды. Оказалось, что $\angle CAB = 12°30'$, $\angle ABC = 72°42'$. Найдите ширину реки.

1038 На горе находится башня, высота которой равна 100 м (рис. 299). Некоторый предмет A у подножия горы наблюдают сначала с вершины B башни под углом 60° к горизонту, а потом с её основания C под углом 30°. Найдите высоту H горы.

§3 Скалярное произведение векторов

105 Угол между векторами

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 300). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α. Ясно, что α не зависит от выбора точки O, от которой откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (пользуясь рисунком 300, докажите это). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен

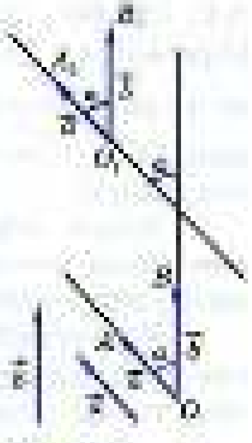


Рис. 300

0°. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

На рисунке 301 углы между векторами равны соответственно: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=30°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=120°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{d}\vec{f}}=0°$, $\widehat{\vec{d}\vec{e}}=180°$.

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. На рисунке 301 $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$.

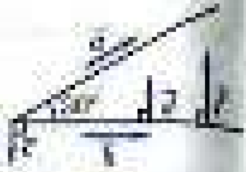


Рис. 301

106 Скалярное произведение векторов

Мы знаем, как выполняется сложение векторов и умножение вектора на число. Введём ещё одно действие над векторами — скалярное умножение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

По определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}). \qquad (1)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т. е. $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=90°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=0$, и поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то из равенства (1) получаем $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=0$, и, следовательно, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=90°$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Таким образом, скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Из формулы (1) также следует, что скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда $\widehat{\vec{a}\vec{b}}<90°$ ($\widehat{\vec{a}\vec{b}}>90°$).

На рисунке 302 $\widehat{\vec a \vec b} = 35°$, $\widehat{\vec a \vec c} = 90°$, $\widehat{\vec b \vec c} = 125°$, поэтому $\vec a \cdot \vec b > 0$, $\vec a \cdot \vec c = 0$, $\vec b \cdot \vec c < 0$.

Рис. 302

Если $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$, то по формуле (1) получаем $\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b|$. В частности,

$$\vec a \cdot \vec a = |\vec a|^2.$$

Скалярное произведение $\vec a \cdot \vec a$ называется **скалярным квадратом вектора** $\vec a$ и обозначается $\vec a^2$. Таким образом, *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

Скалярное произведение векторов широко используется в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы $\vec F$ при перемещении тела из точки M в точку N (рис. 303) равна произведению длин векторов силы $\vec F$ и перемещения $\overrightarrow{MN}$ на косинус угла между ними:

$$A = |\vec F| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos \varphi.$$

Рис. 303

Правая часть этого равенства представляет собой скалярное произведение векторов $\vec F$ и $\overrightarrow{MN}$, т. е. работа A силы $\vec F$ равна скалярному произведению векторов силы и перемещения: $A = \vec F \cdot \overrightarrow{MN}$.

107 Скалярное произведение в координатах

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов.

Теорема

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec a \{x_1; y_1\}$ и $\vec b \{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\vec a \cdot \vec b = x_1 x_2 + y_1 y_2. \quad (2)$$

Доказательство

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость равенства (2) очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 304, а), то по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\alpha. \qquad (3)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (рис. 304, б, в).

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то равенство (3) можно записать так: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right). \qquad (4)$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b} - \vec{a}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$, $\{x_2; y_2\}$ и $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, поэтому

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2,$$
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (4), после несложных преобразований получим формулу (2). **Теорема доказана.**

Следствие 1

Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

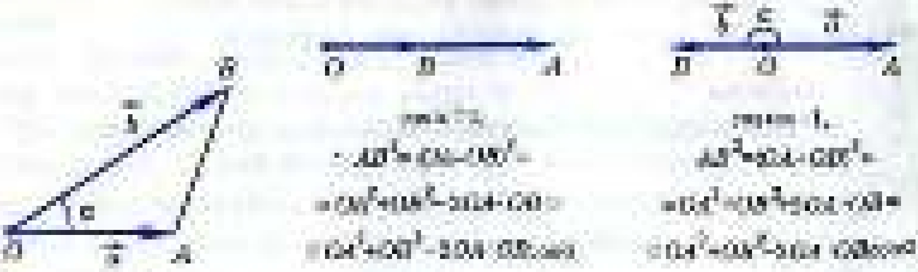


Рис. 304 а) б) в)

Следствие 2

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (3)$$

В самом деле, так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, то $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Подставив сюда выражения для $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим формулу (3).

108 Свойства скалярного произведения векторов

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1°. $\vec{a}^2 \geq 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2°. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон).

3°. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон).

4°. $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон).

Утверждение 1° непосредственно следует из формулы $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, а утверждение 2° — из определения скалярного произведения. Докажем утверждения 3° и 4°.

Введём прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ так:

$$\vec{a}(x_1; y_1),\ \vec{b}(x_2; y_2),\ \vec{c}(x_3; y_3).$$

Используя формулу (2), получаем

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = (x_1 + x_2)\,x_3 + (y_1 + y_2)\,y_3 =$$
$$= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Утверждение 3° доказано.

Докажем теперь утверждение 4°. Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1; ky_1\}$, поэтому $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Замечание

Ясно, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d} = \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}.$$

Задачи

1039 □ Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; ж) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DB}$; з) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$.

1040 □ Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, и диагональ BD равна стороне ромба. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; е) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

1041 □ Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°.

1042 □ В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1043 □ К одной и той же точке приложены две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом 120° друг к другу, причём $|\vec{P}| = 8$, $|\vec{Q}| = 15$. Найдите величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

1044 □ Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\left\{\frac{1}{4}; -1\right\}$, $\vec{b}\{2; 3\}$; б) $\vec{a}\{-5; 6\}$, $\vec{b}\{6; 5\}$; в) $\vec{a}\{1,5; 2\}$, $\vec{b}\{4; -0,5\}$.

1045 Докажите, что ненулевые векторы $\vec{a}\{x; y\}$ и $\vec{b}\{-y; x\}$ перпендикулярны.

1046 Докажите, что векторы $\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{i}-\vec{j}$ перпендикулярны, если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1047 □ При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если: а) $\vec{a}\{4; 5\}$, $\vec{b}\{x; -6\}$; б) $\vec{a}\{x; -1\}$, $\vec{b}\{3; 2\}$; в) $\vec{a}\{0; -3\}$, $\vec{b}\{5; x\}$?

1048 Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A(2; 8)$, $B(-1; 5)$, $C(3; 1)$.

1049 Найдите углы треугольника с вершинами $A(-1; \sqrt{3})$, $B(1; -\sqrt{3})$ и $C\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

1050 Вычислите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=60°$.

1051 Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\vec{c}}=60°$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$.

1052 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1053 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1054 Докажите, что если AM — медиана треугольника ABC, то $4AM^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A$. Пользуясь этой формулой, докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

Решение

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Отсюда получаем

$$(2\overrightarrow{AM})\cdot(2\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$
$$=AB^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A+AC^2,$$

или $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Второе утверждение задачи докажите самостоятельно.

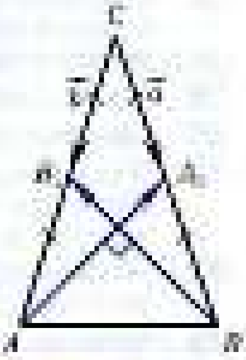


Рис. 305

1055 Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведённые к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и AA_1, BB_1 — его медианы, проведённые к боковым сторонам (рис. 305). Введём обозначения $\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}$,

$\overrightarrow{CB_1}=\vec{b}$, $CA_1=CB_1=a$. Тогда $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{CB}=\vec{b}-2\vec{a}$, поэтому

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})=5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}. \qquad (6)$$

По условию задачи $AA_1\perp BB_1$, и, следовательно, $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$. Далее, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2\cos C$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=a^2$, поэтому равенство (6) принимает вид $0=5a^2\cos C-4a^2$. Отсюда получаем $\cos C=\frac{4}{5}$, $\angle C\approx 36°52'$.

1066 Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Вопросы для повторения к главе XI

1 Начертите оси координат и постройте единичную полуокружность.

2 Объясните, что такое синус и косинус угла α из промежутка $0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$.

3 Что называется тангенсом угла α? Для какого значения α тангенс не определён и почему?

4 Что называется котангенсом угла α? Для каких значений α котангенс не определён и почему?

5 Докажите основное тригонометрическое тождество.

6 Напишите формулы приведения.

7 Выведите формулы, выражающие координаты точки A с неотрицательной ординатой через длину отрезка OA и угол между лучом OA и положительной полуосью Ox.

8 Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника (вычисление площади треугольника по двум сторонам и углу между ними).

9 Сформулируйте и докажите теорему синусов.

10 Сформулируйте и докажите теорему косинусов.

11 Что означают слова «решение треугольника»? Сформулируйте три основные задачи на решение треугольников и объясните, как они решаются.

12 Объясните, как определить высоту предмета, основание которого недоступно.

13 Объясните, как измерить расстояние до недоступной точки.

14 Объясните, что означают слова «угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α». В каком случае угол между векторами считается равным $0°$?

15 Какие два вектора называются перпендикулярными?

16 Что такое скалярное произведение двух векторов?

17 В каком случае скалярное произведение ненулевых векторов: а) равно 0; б) больше 0; в) меньше 0?

18 Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты.

19 Запишите условие перпендикулярности двух ненулевых векторов с координатами $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$.

20 Выведите формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.

21 Сформулируйте и докажите утверждения о свойствах скалярного произведения векторов.

22 Приведите пример использования скалярного произведения векторов при решении геометрических задач.

Дополнительные задачи

1057 В равнобедренном треугольнике ABC $AB = AC = b$, $\angle A = 30°$. Найдите высоты BE и AD, а также отрезки AE, EC, BC.

1058 Найдите площадь треугольника ABC, если:
а) $BC = 4{,}125$ м, $\angle B = 44°$, $\angle C = 72°$;
б) $BC = 4100$ м, $\angle A = 32°$, $\angle C = 120°$.

1059 Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

1060 Используя теорему синусов, решите треугольник ABC, если:
а) $AB = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$;
б) $AB = 5$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 60°$;
в) $AB = 3$ см, $BC = 3{,}3$ см, $\angle A = 48°30'$;
г) $AC = 10{,}4$ см, $BC = 5{,}2$ см, $\angle B = 62°48'$.

1061 Используя теорему косинусов, решите треугольник ABC, если:
а) $AB = 5$ см, $AC = 7{,}5$ см, $\angle A = 135°$;
б) $AB = 2\sqrt{2}$ дм, $BC = 3$ дм, $\angle B = 45°$;
в) $AC = 0{,}6$ м, $BC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ дм, $\angle C = 150°$.

1062 В треугольнике DEF $DE = 4{,}5$ дм, $EF = 9{,}9$ дм, $DF = 70$ см. Найдите углы треугольника.

1063 Найдите биссектрису AD треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$.

1064 Чтобы определить расстояние между точками A и B, которое нельзя измерить, выбирают третью точку C, из которой видны точки A и B. Измерив угол ACB и расстояния AC и CB, находят расстояние AB. Найдите AB, если $AC = b$, $CB = a$, $\angle ACB = \alpha$.

1065 ☐ Докажите, что треугольник с вершинами $A(3; 0)$, $B(1; 5)$ и $C(2; 1)$ тупоугольный. Найдите косинус тупого угла.

1066 ☐ Найдите длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1067 ☐ Найдите диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\widehat{\vec{p}\vec{q}} = 45°$.

1068 ☐ При каком значении x векторы $\vec{p} = x\vec{a} - 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 120°$?

1069 ☐ В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Найдите острый угол между этими медианами.

1070 ☐ В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ см и $BC = 8$ см боковая сторона равна $4\sqrt{7}$ см, а $\angle ADC = 60°$. Через вершину C проведена прямая l, делящая трапецию на два многоугольника, площади которых равны. Найдите площадь трапеции и длину отрезка прямой l, заключённого внутри трапеции.

1071 ☐ В треугольнике ABC, площадь которого равна $3\sqrt{3}$, угол A острый, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 3$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

1072 ☐ Дан ромб $MNPQ$. Отрезок MA — биссектриса треугольника MPQ, $\angle NMQ = 4\alpha$, $AQ = a$. Найдите площадь данного ромба.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1073 Четырёхугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(2; 0)$, $D(1; 6)$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, и найдите её площадь.

Решение

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеют координаты: $\overrightarrow{AD}\{2; 4\}$, $\overrightarrow{BC}\{1; 2\}$. Эти векторы коллинеарны, так как их координаты пропорциональны. По координатам векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ находим их длины: $AD = \sqrt{20}$, $BC = \sqrt{5}$. Таким образом, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, следовательно, $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Пусть S — площадь трапеции $ABCD$. Согласно утверждению задачи 1060, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, где α — угол между AC и BD. По формуле (5) § 3 найдём сначала $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})$. Так как $\overrightarrow{AC}\{3; -2\}$, $\overrightarrow{BD}\{0; 8\}$, то $AC = \sqrt{13}$, $BD = 8$ и $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}}) =$

$= \frac{3\cdot 9 - 18}{\sqrt{13}\cdot 6} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$. Отсюда следует, что $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Таким образом, $S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 6\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = 18$.

1074 Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC и $BM = kMC$. Докажите, что

$$(1+k)^2 AM^2 = k^2b^2 + 2kbc\cos A + c^2,$$

где $b = AC$, $c = AB$.

Решение

По условию задачи M лежит на отрезке BC и $BM = kMC$, поэтому $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$ или $\overrightarrow{BM} = k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM})$. Следовательно,

$$\overrightarrow{BM} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{BC} = \frac{k}{1+k}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

По правилу треугольника сложения векторов $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, или $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$. Таким образом,

$$(1+k)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

Отсюда получаем:

$$(1+k)^2(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}) =$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + k^2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

Так как

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} = AM^2,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = c^2,$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = b^2,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = bc\cos A,$$

то полученная формула совпадает с искомой формулой.

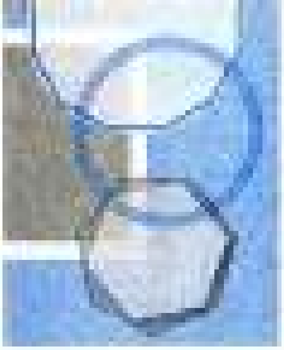
1075 В треугольнике ABC отрезок AD — биссектриса, AM — медиана, $b = AC$, $c = AB$. Докажите, что:

а) $AD = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$;

б) $AM = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}$.

1076 Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны. Докажите, что этот параллелограмм является ромбом.

1077 Докажите, что коэффициент подобия двух подобных треугольников равен отношению радиусов окружностей: а) описанных около треугольников; б) вписанных в эти треугольники.



Глава XII

Длина окружности и площадь круга

Вы знаете, как измеряются отрезки и как измеряются площади многоугольников. Вам известны формулы, по которым можно вычислить площади треугольника и некоторых четырёхугольников. А как вычислить длину окружности и площадь круга, если известен их радиус? Ответ на этот вопрос вы найдёте в этой главе. Но сначала нам предстоит познакомиться с красивыми геометрическими фигурами — правильными многоугольниками, вывести для них важные формулы, а затем уже с их помощью мы получим формулы длины окружности и площади круга.

§ 1 Правильные многоугольники

109 Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Примерами правильных многоугольников являются равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке 308 изображены правильные пятиугольник, семиугольник и восьмиугольник.

Выведем формулу для вычисления угла α_n правильного n-угольника. Сумма всех углов такого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, причём все его углы равны, поэтому

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180°.$$

Рис. 308

110 Окружность, описанная около правильного многоугольника

Напомним, что окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности. Докажем теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

Теорема

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 307).

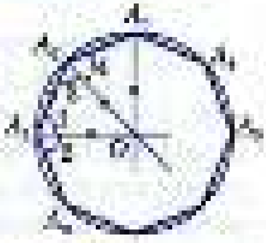


Рис. 307

Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 1 = \angle 3$, поэтому треугольник A_1A_2O равнобедренный: а значит $OA_1 = OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_2A_3O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — общая сторона и $\angle 3 = \angle 4$), следовательно, $OA_3 = OA_1$. Точно так же можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

Итак, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ можно описать только одну окружность. Теорема доказана.

111 Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Напомним, что окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

Докажем теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Теорема

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 306). В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = ... = \triangle OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины O, также будут равны: $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в данный правильный многоугольник.

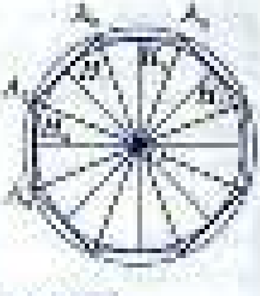
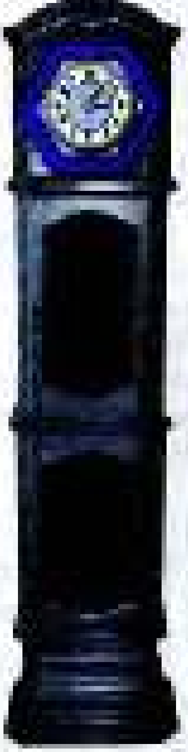


Рис. 306

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда её центр O_1 равноудалён от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. **Теорема доказана.**



Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется **центром правильного многоугольника**.

112 Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем сначала, что

$$S = \frac{1}{2}Pr. \qquad (1)$$

Соединим центр данного многоугольника с его вершинами (см. рис. 308). Тогда многоугольник разобьётся на n равных треугольников, площадь каждого из которых будет равна $\frac{1}{2}a_nr$. Следовательно,

$$S = n \cdot \frac{1}{2}a_nr = \frac{1}{2}(na_n)r = \frac{1}{2}Pr.$$

Выведем далее формулы:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \qquad (2)$$

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}. \qquad (3)$$

Для вывода этих формул воспользуемся рисунком 308. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n}\cdot 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно,

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$r = OH_1 = R\sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Полагая в формуле (2) $n = 3$, 4 и 6, получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3},$$

$$a_4 = 2R\sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2},$$

$$a_6 = 2R\sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\cdot\frac{1}{2} = R. \quad (4)$$

113 Построение правильных многоугольников

Рассмотрим способы построения некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Построения правильного треугольника и правильного четырёхугольника, т. е. квадрата, рассматривались ранее. Для построения правильных n-угольников при $n > 4$ обычно используется окружность, описанная около многоугольника.

Задача 1

Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой (4). Пусть PQ — данный отрезок. Построим окружность радиуса PQ и отметим на ней произвольную точку A_1 (рис. 309). Затем, не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, чтобы выполнялись равенства $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

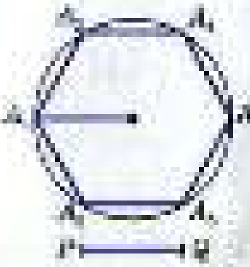


Рис. 309

Для построения правильных многоугольников часто используется следующая задача:

Задача 2

Дан правильный n-угольник. Построить правильный $2n$-угольник.

Решение

Пусть $A_1A_2...A_n$ — данный правильный n-угольник. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим буквой O точку их пересечения. Затем проведём окружность с центром O радиуса OA_1 (см. рис. 307).

Для решения задачи достаточно разделить дуги A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 пополам и каждую из точек деления B_1, B_2, ..., B_n соединить отрезками с концами соответствующей дуги (рис. 310, на этом рисунке $n=6$). Для построения точек B_1, B_2, ..., B_n можно воспользоваться серединными перпендикулярами к сторонам данного n-угольника. На рисунке 310 таким способом построен правильный двенадцатиугольник $A_1B_1A_2B_2...A_6B_6$.

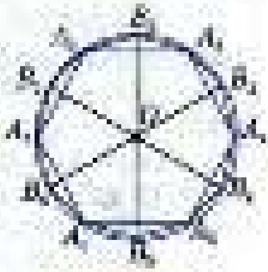


Рис. 310

Применяя указанный способ, можно с помощью циркуля и линейки построить целый ряд правильных многоугольников, если построен один из них. Например, построив правильный четырёхугольник, т. е. квадрат, и пользуясь результатом задачи 2, можно построить правильный восьмиугольник, затем правильный шестнадцатиугольник и вообще правильный 2^k-угольник, где k — любое целое число, большее двух.

Замечание

Рассмотренные примеры показывают, что многие правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Оказывается, однако, что не все правильные многоугольники допускают такое построение. Доказано, например, что правильный семиугольник не может быть построен при помощи циркуля и линейки. Любопытно, что с помощью этих инструментов можно построить правильный семнадцатиугольник.

Задачи

1078 Верно ли утверждение: а) любой правильный многоугольник является выпуклым; б) любой выпуклый многоугольник является правильным? Ответ обоснуйте.

1079 Какие из следующих утверждений верны: а) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны; б) треугольник является правильным, если все его углы равны; в) любой равносторонний треугольник является правильным; г) любой четырёхугольник с равными сторонами является правильным? Ответ обоснуйте.

1080 Докажите, что любой правильный четырёхугольник является квадратом.

1081 □ Найдите углы правильного n-угольника, если: а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = 6$; г) $n = 10$; д) $n = 18$.

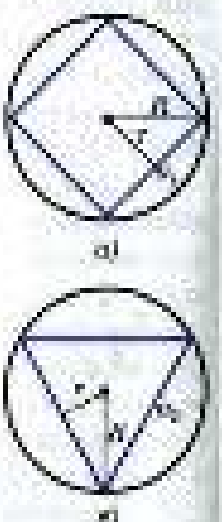
1082 Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника, если при каждой вершине взято по одному внешнему углу?

1083 □ Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а) $60°$; б) $90°$; в) $135°$; г) $150°$?

1084 □ Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна: а) $60°$; б) $30°$; в) $90°$; г) $36°$; д) $18°$; е) $72°$?

1085 Докажите, что серединные перпендикуляры к любым двум сторонам правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают.

1086 Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника, либо пересекаются, либо совпадают.



а)

б)

Рис. 311

1087 □ На рисунке 311, а изображён квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_4 — сторона квадрата, P — периметр квадрата, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

№	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

1088 ☐ На рисунке 311, б изображён правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_3 — сторона треугольника, P — периметр треугольника, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

№	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

1089 ☐ Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

1090 ☐ Сечение головки газового вентиля имеет форму правильного треугольника, сторона которого равна 3 см. Каким должен быть минимальный диаметр круглого железного стержня, из которого изготовляют вентиль?

1091 ☐ Поперечное сечение деревянного бруска является квадратом со стороной 6 см. Найдите наибольший диаметр круглого стержня, который можно выточить из этого бруска.

1092 ☐ Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см.

1093 ☐ Около правильного треугольника описана окружность радиуса R. Докажите, что $R = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1094 ☐ Найдите площадь S правильного n-угольника, если: а) $n = 4$, $R = 3\sqrt{2}$ см; б) $n = 3$, $P = 24$ см; в) $n = 6$, $r = 9$ см; г) $n = 8$, $r = 5\sqrt{3}$ см.

1095 ☐ Расстояние между параллельными гранями шестигранной головки болта, основание которой имеет форму правильного шестиугольника, равно 1,5 см. Найдите площадь основания.

1096 ☐ Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения площадей этих многоугольников.

1097 ☐ Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около неё.

1098 ☐ Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника: а) через радиус вписанной окружности; б) через радиус описанной окружности.

1099 Правильный восьмиугольник $A_1A_2...A_8$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что четырёхугольник $A_3A_4A_7A_8$ является прямоугольником, и выразите его площадь через R.

1100 □ С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите: а) правильный шестиугольник; б) правильный треугольник; в) квадрат; г) правильный восьмиугольник.

§ 2 Длина окружности и площадь круга

114 Длина окружности

Чтобы получить наглядное представление о длине окружности, представим себе, что окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити. Если мы разрежем нить в какой-нибудь точке A и распрямим её, то получим отрезок AA_1, длина которого и есть длина окружности (рис. 312).

Рис. 312

Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближённым значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближённое значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон всё ближе и ближе «прилегает» к окружности (рис. 313). Точное значение длины окружности — это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

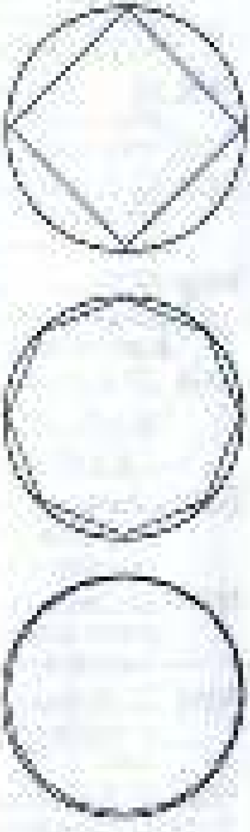


Рис. 313

Выведем формулу, выражающую длину окружности через её радиус. Пусть C и C' — длины окружностей радиусов R и R'. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим через P_n и P'_n их периметры, а через a_n и a'_n — их стороны. Используя формулу (2) из § 1, получаем:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180°}{n},$$

$$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180°}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

Это равенство справедливо при любом значении n. Будем теперь неограниченно увеличивать число n. Так как $P_n \to C$, $P'_n \to C'$ при $n \to \infty$, то предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ равен $\frac{C}{C'}$. С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. Из этого равенства следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, т. е. отношение длины окружности к её диаметру есть одно и то же число для всех окружностей. Это число принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R.$$

Доказано, что π является бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. иррациональным числом. Рациональное число $\frac{22}{7}$ является приближённым значением числа π с точностью до 0,002. Это приближённое значение было найдено ещё в III в. до н. э. великим греческим учёным Архимедом. При решении задач обычно пользуются приближённым значением π с точностью до 0,01: $\pi \approx 3,14$.

Выведем теперь формулу для вычисления длины l дуги окружности с градусной мерой α. Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Поэтому длина l выражается формулой

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

116 Площадь круга

Напомним, что кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Круг радиуса R с центром O содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся от точки O на расстоянии, не большем R.

Выведем формулу для вычисления площади круга радиуса R. Для этого рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$, вписанный в окружность, ограничивающую круг (рис. 314). Очевидно, площадь S данного круга больше площади S_n многоугольника $A_1A_2...A_n$, так как этот многоугольник целиком содержится в данном круге. С другой стороны, площадь S'_n круга, вписанного в многоугольник, меньше S_n, так как этот круг целиком содержится в многоугольнике. Итак,

$$S'_n < S_n < S. \qquad (2)$$

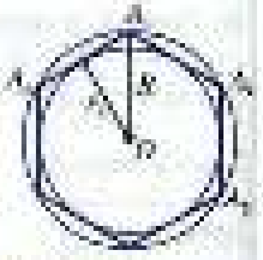


Рис. 314

Будем теперь неограниченно увеличивать число сторон многоугольника. По формуле (3) § 1 имеем $r_n = R\cos\frac{180^\circ}{n}$, где r_n — радиус вписанной в многоугольник окружности. При $n \to \infty$ $\cos\frac{180^\circ}{n} \to 1$, поэтому $r_n \to R$. Иными словами, при неограниченном увеличении числа сторон многоугольника вписанная в него окружность «стремится» к описанной окружности. Поэтому $S'_n \to S$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенств (2) следует, что $S_n \to S$ при $n \to \infty$.

По формуле (1) § 1 $S_n = \frac{1}{2}P_n r_n$, где P_n — периметр многоугольника $A_1A_2...A_n$. Учитывая, что $r_n \to R$, $P_n \to 2\pi R$, $S_n \to S$ при $n \to \infty$, получаем $S = \frac{1}{2}2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Итак, для вычисления площади S круга радиуса R мы получили формулу

$$S = \pi R^2.$$

Замечание

В течение веков усилия многих математиков были направлены на решение задачи, получившей название **задачи о квадратуре круга**: построить при помощи циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Только в конце XIX века было доказано, что такое построение невозможно.

116 Площадь кругового сектора

Круговым сектором или просто **сектором** называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора**. На рисунке 315, а изображены два сектора с дугами ALB и AMB. Первый из этих секторов закрашен.

а)

б)

Рис. 315

Выведем формулу для вычисления площади S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α.

Так как площадь всего круга равна πR^2, то площадь кругового сектора, ограниченного дугой в 1°, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь S выражается формулой

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

Круговым сегментом или просто **сегментом** называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы этой дуги (рис. 315, б).

Если градусная мера дуги меньше 180°, то площадь сегмента можно найти, вычитая из площади сектора площадь равнобедренного треугольника, сторонами которого являются два радиуса и хорда сегмента.

Задачи

1101 ☐ Перечертите таблицу и, используя формулу длины C окружности радиуса R, заполните пустые клетки таблицы. Воспользуйтесь значением $\pi \approx 3,14$.

C			82	18π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	3			0,7		101,5	$2\frac{1}{3}$	

1102 ☐ Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза; в) увеличить в k раз; г) уменьшить в k раз?

1103 Как изменится радиус окружности, если длину окружности: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1104 ☐ Найдите длину окружности, описанной около: а) правильного треугольника со стороной a; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b; в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b; г) прямоугольника с меньшей стороной a и острым углом α между диагоналями; д) правильного шестиугольника, площадь которого равна $24\sqrt{3}$ см^2.

1105 ☐ Найдите длину окружности, вписанной: а) в квадрат со стороной a; б) в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c; в) в прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α; г) в равнобедренный треугольник с углом при основании α и высотой h, проведённой к основанию.

1106 ☐ Автомобиль прошёл 989 м. Найдите диаметр колеса автомобиля, если известно, что оно сделало 500 оборотов.

1107 ☐ Метр составляет приблизительно $\frac{1}{40\,000\,000}$ часть земного экватора. Найдите диаметр Земли в километрах, считая, что Земля имеет форму шара.

1108 ☐ Вычислите длину круговой орбиты искусственного спутника Земли, если спутник вращается на расстоянии 320 км от поверхности Земли, а радиус Земли равен 6370 км.

1109 ☐ Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см, если её градусная мера равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

1110 ☐ Расстояние между серединами зубьев зубчатого колеса, измеренное по дуге окружности, равно 47,1 мм. Диаметр колеса равен 400 мм. Сколько зубьев имеет колесо?

1111 ☐ Шлифовальный камень, имеющий форму диска, находится в защитном кожухе (рис. 316). Диаметр камня равен 58 см, дуга

Рис. 316

незакрашенной его части равна 117°. Найдите длину дуги незакрашенной части камня.

1112 ☐ Найдите длину маятника стенных часов, если угол его колебания составляет 38°, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 24 см.

1113 ☐ Радиус закругления пути железнодорожного полотна равен 5 км, а длина дуги закругления — 400 м. Какова градусная мера дуги закругления?

1114 ☐ Перечертите таблицу и, используя формулу для площади S круга радиуса R, заполните пустые клетки. Воспользуйтесь значением $\pi \approx 3,14$.

S			4		49π			6,25
R	2	3		$\frac{3}{7}$		54,8	$\sqrt{3}$	

1115 Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1116 ☐ Найдите площадь круга, описанного около: а) прямоугольника со сторонами a и b; б) прямоугольного треугольника с катетом a и противолежащим углом α; в) равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведённой к основанию.

1117 ☐ Найдите площадь круга, вписанного: а) в равносторонний треугольник со стороной a; б) в прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α; в) в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α, противолежащим основанию; г) в равнобедренную трапецию с большим основанием a и острым углом α.

1118 ☐ Диаметр основания царь-колокола, находящегося в Московском Кремле, равен 6,6 м. Найдите площадь основания колокола.

1119 ☐ Длина окружности цирковой арены равна 41 м. Найдите диаметр и площадь арены.

1120 ☐ Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами R_1 и R_2, $R_1 < R_2$. Вычислите площадь кольца, если $R_1 = 1,5$ см, $R_2 = 2,5$ см.

1121 ☐ Какой толщины слой нужно снять с круглой медной проволоки, имеющей площадь сечения 314 мм², чтобы она проходила сквозь отверстие диаметром 18,5 мм?

1122 ☐ Вокруг круглой клумбы, радиус которой равен 3 м, проложена дорожка шириной 1 м. Сколько нужно песка, чтобы посыпать дорожку, если на 1 м² дорожки требуется 0,8 дм³ песка?

1123 ☐ Из круга радиуса r вырезан квадрат, вписанный в окружность, которая ограничивает круг. Найдите площадь оставшейся части круга.

1124 □ На мишени имеются четыре окружности с общим центром, радиусы которых равны 1, 2, 3 и 4. Найдите площадь наименьшего круга, а также площадь каждого из трёх колец мишени.

1125 На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

1126 □ Из круга, радиус которого 10 см, вырезан сектор с дугой в 60°. Найдите площадь оставшейся части круга.

1127 □ Площадь сектора с центральным углом 72° равна S. Найдите радиус сектора.

1128 □ Сторона квадрата, изображённого на рисунке 317, равна a. Вычислите площадь закрашенной фигуры.

a

Рис. 317

Вопросы для повторения к главе XII

1 Какой многоугольник называется правильным? Приведите примеры правильных многоугольников.

2 Выведите формулу для вычисления угла правильного n-угольника.

3 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

4 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

5 Выведите формулу для вычисления площади правильного многоугольника через его периметр и радиус вписанной окружности.

6 Выведите формулы для вычисления стороны правильного n-угольника и радиуса вписанной в него окружности через радиус описанной окружности.

7 Как выражаются стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника через радиус описанной окружности?

8 Выведите формулу для вычисления длины окружности.

9 Объясните, какое число обозначается буквой π и чему равно его приближённое значение.

10 Выведите формулу для вычисления длины дуги окружности.

11 Выведите формулу для вычисления площади круга.

12 Что такое круговой сектор? Выведите формулу для вычисления площади кругового сектора.

13 Что такое круговой сегмент? Объясните, как можно вычислить его площадь.

Дополнительные задачи

1129 □ Сколько сторон имеет правильный многоугольник, один из внешних углов которого равен: а) 18°; б) 40°; в) 72°; г) 60°?

1130 □ На стороне правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 3 дм, построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

1131 □ Найдите периметр правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, если $A_1A_4 = 2,24$ см.

1132 □ Найдите отношение периметров правильного треугольника и квадрата: а) вписанных в одну и ту же окружность; б) описанных около одной и той же окружности.

1133 Диагонали A_1A_6 и A_4A_{11} правильного двенадцатиугольника пересекаются в точке B (рис. 318). Докажите, что: а) треугольники $A_1A_{11}B$ и A_4A_6B равносторонние; б) $A_1A_6 = 2r$, где r — радиус вписанной в двенадцатиугольник окружности.

1134 Диагонали A_1A_4 и A_2A_7 правильного десятиугольника $A_1A_2...A_{10}$, вписанного в окружность радиуса R, пересекаются в точке B (рис. 319). Докажите, что: а) $A_2A_7 = 2R$; б) $\triangle A_1A_2B$ и $\triangle BA_2O$ — подобные равнобедренные треугольники; в) $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

1135 □ В круг, площадь которого равна 36π см², вписан правильный шестиугольник. Найдите сторону этого шестиугольника и его площадь.

1136 □ Квадрат $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность радиуса R (рис. 320). На его сторонах отмечены восемь точек так, что $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = A_4C_4 = R$. Докажите, что восьмиугольник $B_1C_4B_4C_3B_3C_2B_2C_1$ правильный, и выразите площадь этого восьмиугольника через радиус R.

1137 □ За два оборота по круговой орбите вокруг Земли космический корабль проделал путь 84 152 км. На какой высоте над поверхностью Земли находится корабль, если радиус Земли равен 6370 км?

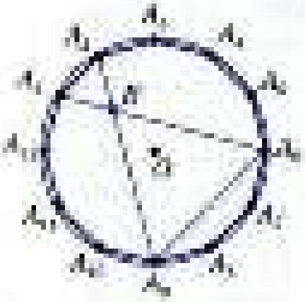


Рис. 318

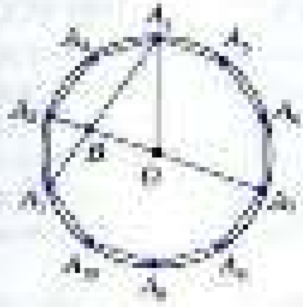


Рис. 319

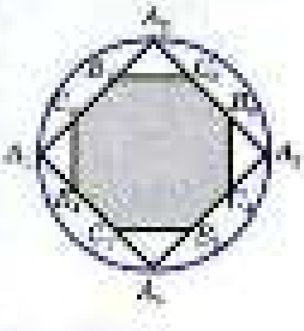


Рис. 320

1138 □ Найдите длину окружности, вписанной в ромб, если:
а) диагонали ромба равны 6 см и 8 см;
б) сторона ромба равна a и острый угол равен α.

1139 □ Лесной участок имеет форму круга. Чтобы обойти этот участок по опушке, идя со скоростью 4 км/ч, нужно затратить на 45 мин больше, чем для того, чтобы пересечь его по диаметру. Найдите длину опушки данного участка.

1140 В правильный многоугольник вписана окружность. Докажите, что отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, и площади многоугольника равно отношению длины окружности к периметру многоугольника.

1141 □ Фигура ограничена большими дугами двух окружностей, имеющих общую хорду, длина которой равна 6 см. Для одной окружности эта хорда является стороной вписанного квадрата, для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите сумму длин этих дуг.

1142 □ Основания трапеции, около которой можно описать окружность, равны 4 см и 14 см, а одна из боковых сторон равна 13 см. Найдите длину описанной окружности.

1143 Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разделяет треугольник на два подобных треугольника (см. задачу 2, п. 66). Докажите, что отношение длин окружностей, вписанных в эти треугольники, равно коэффициенту подобия этих треугольников.

Задачи на построение

1144* □ Постройте правильный восьмиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

1145* □ Даны два круга. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей данных кругов.

1146 □ Около данной окружности опишите: а) правильный треугольник; б) правильный шестиугольник.

1147 □ Около данной окружности опишите: а) правильный четырёхугольник; б) правильный восьмиугольник.

Глава XIII

Движения

Слово «движение» вам знакомо. Но в геометрии оно имеет особый смысл. Какой именно, об этом вы узнаете из данной главы. А пока отметим, что с помощью движений удаётся находить красивые решения многих геометрических задач. Примеры таких решений вы найдёте в этой главе.

§1 Понятие движения

117 Отображение плоскости на себя

Представим себе, что каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) какая-то точка этой же плоскости, причём любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке. Тогда говорят, что дано **отображение плоскости на себя**.

Фактически мы уже встречались с отображениями плоскости на себя — вспомним осевую симметрию (см. п. 48). Она даёт нам пример такого отображения. В самом деле, пусть a — ось симметрии (рис. 321). Возьмём произвольную точку M, не лежащую на прямой a, и построим симметричную ей точку M_1 относительно прямой a. Для этого нужно провести перпендикуляр MP к прямой a и отложить на прямой MP отрезок PM_1, равный отрезку MP, так, как показано на рисунке 321. Точка M_1 и будет искомой. Если же точка M лежит на прямой a, то симметричная ей точка M_1 совпадает с точкой M. Мы видим, что с помощью осевой симметрии каждой точке M плоскости сопоставляется точка M_1 этой же плоскости. При этом любая точка M_1 оказывается сопоставленной некоторой точке M. Это ясно из рисунка 321.

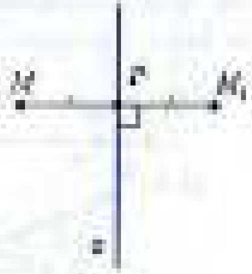


Рис. 321

Итак, осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.

Рассмотрим теперь центральную симметрию плоскости (см. п. 48). Пусть O — центр симметрии. Каждой точке M плоскости сопоставляется точка M_1, симметричная точке M относительно точки O (рис. 322). Попытайтесь самостоятельно убедиться в том, что центральная симметрия плоскости также представляет собой отображение плоскости на себя.

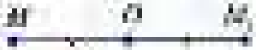


Рис. 322

116 Понятие движения

Осевая симметрия обладает следующим важным свойством — **это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками.**

Поясним, что это значит. Пусть M и N — какие-либо точки, а M_1 и N_1 — симметричные им точки относительно прямой a (рис. 323). Из точек N и N_1 проведём перпендикуляры NP и N_1P_1 к прямой MM_1. Прямоугольные треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равны по двум катетам: $MP = M_1P_1$ и $NP = N_1P_1$ (объясните, почему эти катеты равны). Поэтому гипотенузы MN и M_1N_1 также равны. Следовательно, **расстояние между точками M и N равно расстоянию между симметричными им точками M_1 и N_1.** Другие случаи расположения точек M, N и M_1, N_1 рассмотрите самостоятельно и убедитесь в том, что и в этих случаях $MN = M_1N_1$ (рис. 324). Таким об-

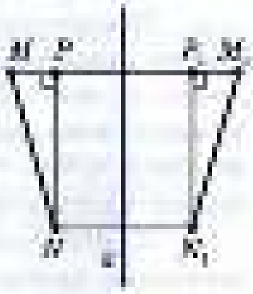


Рис. 323

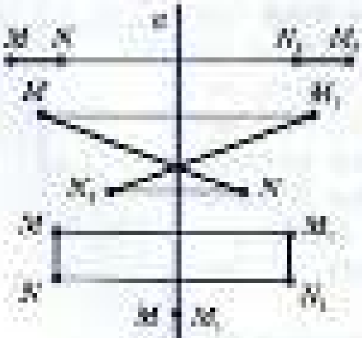


Рис. 324

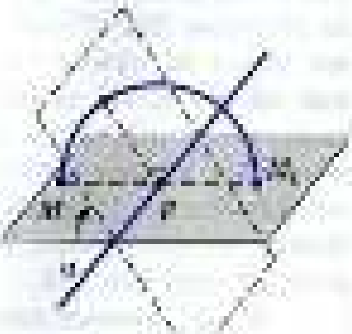


Рис. 325

образом, осевая симметрия является отображением, которое сохраняет расстояния между точками. Любое отображение, обладающее этим свойством, называется движением (или перемещением).

Итак, **движение плоскости — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.**

Почему отображение, сохраняющее расстояния, называют движением (или перемещением), можно пояснить на примере осевой симметрии. Её можно представить как поворот плоскости в пространстве на 180° вокруг оси a. На рисунке 325 показано, каким образом происходит такой поворот.

Отметим, что **центральная симметрия плоскости также является движением** (пользуясь рисунком 326, убедитесь в этом самостоятельно).

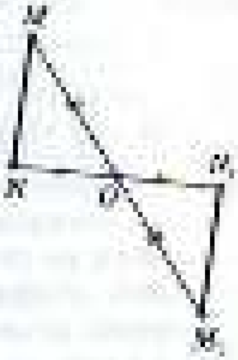


Рис. 326

Докажем следующую теорему:

Теорема

При движении отрезок отображается на отрезок.

Доказательство

Пусть при заданном движении плоскости концы M и N отрезка MN отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 327). Докажем, что весь отрезок MN отображается на отрезок M_1N_1. Пусть P — произвольная точка отрезка MN, P_1 — точка, в которую отображается точка P. Тогда $MP + PN = MN$. Так как при движении расстояния сохраняются, то

$$M_1N_1 = MN,\ M_1P_1 = MP \text{ и } N_1P_1 = NP. \qquad (1)$$

Рис. 327

Из равенств (1) получаем, что $M_1P_1 + P_1N_1 = M_1N_1$, и, значит, точка P_1 лежит на отрезке M_1N_1 (если предположить, что это не так, то будет выполняться неравенство $M_1P_1 + P_1N_1 > M_1N_1$). Итак, точки отрезка MN отображаются в точки отрезка M_1N_1.

Нужно ещё доказать, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 отображается какая-нибудь точки P отрезка MN. Докажем это. Пусть P_1 — произвольная точка отрезка M_1N_1, и точка P при заданном движении отображается в точку P_1. Из соотношений (1) и равенства $M_1N_1 = M_1P_1 + P_1N_1$ следует, что $MP + PN = MN$, и, значит, точка P лежит на отрезке MN. Теорема доказана.

Следствие

При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

В самом деле, в силу доказанной теоремы при движении каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, поэтому и треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

Пользуясь доказанной теоремой, нетрудно убедиться в том, что при движении прямая отображается на прямую, луч — на луч, а угол — на равный ему угол.

119* Наложения и движения

Напомним, что в нашем курсе геометрии равенство фигур определяется с помощью наложений. Мы говорим, что фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, если фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$. Понятие наложения в нашем курсе относится к основным понятиям геометрии, поэтому определение наложения не даётся. Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем некоторое отображение фигуры Ф на фигуру $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается в определённую точ-

ку плоскости, т. е. **наложение — это отображение плоскости на себя.**

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. **Наложения — это такие отображения плоскости на себя,** которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. приложение 1, аксиомы 7—13). Эти аксиомы позволяют доказать все те свойства наложений, которые мы себе представляем наглядно и которыми пользуемся при доказательстве теорем и решении задач. Докажем, например, что **при наложении различные точки отображаются в различные точки.**

В самом деле, предположим, что это не так, т. е. при некотором наложении какие-то две точки A и B отображаются в одну и ту же точку C. Тогда фигура Φ_1, состоящая из точек A и B, равна фигуре Φ_2, состоящей из одной точки C. Отсюда следует, что $\Phi_2 = \Phi_1$ (аксиома 12), т. е. при некотором наложении фигура Φ_2 отображается в фигуру Φ_1. Но это невозможно, так как наложение — это отображение, а при любом отображении точке C ставится в соответствие только одна точка плоскости.

Из доказанного утверждения следует, что при наложении отрезок отображается на равный ему отрезок. Действительно, пусть при наложении концы A и B отрезка AB отображаются в точки A_1 и B_1. Тогда отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1 (аксиома 7), и, следовательно, отрезок AB равен отрезку A_1B_1. Так как равные отрезки имеют равные длины, то наложение является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния, т. е. **любое наложение является движением плоскости.**

Докажем, что верно и обратное утверждение.

Теорема

Любое движение является наложением.

Доказательство

Рассмотрим произвольное движение (обозначим его буквой g) и докажем, что оно является наложением. Возьмём какой-нибудь треугольник ABC. При движении g он отображается на равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. По определению равных треугольников существует наложение f, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1.

Докажем, что движение g совпадает с наложением f. Предположим, что это не так. Тогда на плоскости найдётся хотя бы одна такая точка M, которая при движении g отображается в точку M_1, а при наложении f — в другую точку M_2. Так как при отображениях f и g сохраняются расстояния, то $AM = A_1M_1$, $AM = A_1M_2$, поэтому $A_1M_1 = A_1M_2$, т. е. точка A_1 равноудалена от точек M_1 и M_2 (рис. 328). Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 равноудалены от точек M_1 и M_2. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, так как вершины треугольника $A_1B_1C_1$ не лежат на одной прямой. Таким образом, отображения f и g совпадают, т. е. движение g является наложением. Теорема доказана.

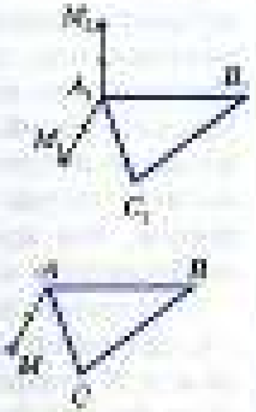


Рис. 328

Следствие

При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.

Задачи

1148 Докажите, что при осевой симметрии плоскости:
а) прямая, параллельная оси симметрии, отображается на прямую, параллельную оси симметрии;
б) прямая, перпендикулярная к оси симметрии, отображается на себя.

1149 Докажите, что при центральной симметрии плоскости:
а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую;
б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

1150 Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

Решение

Пусть при данном движении угол AOB отображается на угол $A_1O_1B_1$, причём точки A, O, B отображаются соответственно в точки A_1, O_1, B_1. Так как при движении сохраняются расстояния, то $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Если угол AOB неразвёрнутый, то треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по трём сторонам, и, следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый (докажите это), поэтому эти углы равны.

1151 Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

1152 Докажите, что при движении: а) параллелограмм отображается на параллелограмм; б) трапеция отображается на трапецию; в) ромб отображается на ромб; г) прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат — на квадрат.

1153 Докажите, что при движении окружность отображается на окружность того же радиуса.

1154 Докажите, что отображение плоскости, при котором каждая точка отображается на себя, является наложением.

1155 ABC и $A_1B_1C_1$ — произвольные треугольники. Докажите, что существует не более одного движения, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1, C_1.

1156 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Докажите, что существует движение, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1 и C_1, и притом только одно.

Решение

По условию задачи треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, существует наложение, т. е. движение, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Это движение является единственным движением, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1 (задача 1155).

1157 Докажите, что два параллелограмма равны, если смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны смежным сторонам и углу между ними другого параллелограмма.

1158 Даны две прямые a и b. Постройте прямую, на которую отображается прямая b при осевой симметрии с осью a.

1159 □ Даны прямая a и четырёхугольник $ABCD$. Постройте фигуру F, на которую отображается данный четырёхугольник при осевой симметрии с осью a. Что представляет собой фигура F?

1160 Даны точка O и прямая b. Постройте прямую, на которую отображается прямая b при центральной симметрии с центром O.

1161 Даны точка O и треугольник ABC. Постройте фигуру F, на которую отображается треугольник ABC при центральной симметрии с центром O. Что представляет собой фигура F?

§ 2 Параллельный перенос и поворот

120 Параллельный перенос

Пусть $\vec{a}$ — данный вектор. **Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$** называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен вектору $\vec{a}$ (рис. 329).

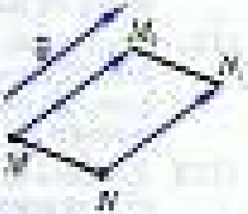


Рис. 329

Параллельный перенос является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния. Докажем это. Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (см. рис. 329). Так как $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, то $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$. Отсюда следует, что $MM_1 \parallel NN_1$ и $MM_1 = NN_1$, поэтому четырёхугольник MM_1N_1N — параллелограмм. Следовательно, $MN = M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случай, когда точки M и N расположены на прямой, параллельной вектору $\vec{a}$, рассмотрите самостоятельно). Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение. Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора $\vec{a}$ на его длину.

121 Поворот

Отметим на плоскости точку O (центр поворота) и зададим угол α (угол поворота). **Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α** на-

называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM = OM_1$ и угол MOM_1 равен α (рис. 330). При этом точка O остаётся на месте, т. е. отображается сама в себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении — по часовой стрелке или против часовой стрелки. На рисунке 330 изображён поворот против часовой стрелки.

Рис. 330

Поворот является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния.

Докажем это. Пусть O — центр поворота, α — угол поворота против часовой стрелки (случай поворота по часовой стрелке рассматривается аналогично). Допустим, что при этом повороте точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 331). Треугольники OMN и OM_1N_1 равны по двум сторонам и углу между ними: $OM = OM_1$, $ON = ON_1$ и $\angle MON = \angle M_1ON_1$ (для случая, изображённого на рисунке 331, каждый из этих углов равен сумме угла α и угла M_1ON). Из равенства этих треугольников следует, что $MN = M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случай, когда точки O, M и N расположены на одной прямой, рассмотрите самостоятельно). Итак, поворот сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение. Это движение можно представить себе как поворот всей плоскости вокруг данной точки O на данный угол α.

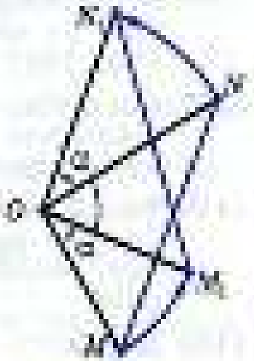


Рис. 331

Задачи

1162 Начертите отрезок AB и вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Постройте отрезок A_1B_1, который получается из отрезка AB параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.

1163 Начертите треугольник ABC, вектор $\overrightarrow{MM_1}$, который не параллелен ни одной из сторон треугольника, и вектор $\vec{a}$, параллежащей стороне AC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, который получается из треугольника ABC параллельным переносом: а) на вектор $\overrightarrow{MM_1}$; б) на вектор $\vec{a}$.

1164 ☐ Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и взята точка D на прямой AC, что точка C лежит на отрезке AD. а) Постройте отрезок B_1D, который получается из отрезка BC параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CD}$. б) Докажите, что четырёхугольник ABB_1D — равнобедренная трапеция.

1165 Даны треугольник, трапеция и окружность. Постройте фигуры, которые получаются из этих фигур параллельным переносом на данный вектор $\vec{a}$.

1166 ☐ Постройте отрезок A_1B_1, который получается из данного отрезка AB поворотом вокруг данного центра O: а) на $120°$ по часовой стрелке; б) на $75°$ против часовой стрелки; в) на $180°$.

1167 Постройте треугольник, который получается из данного треугольника ABC поворотом вокруг точки A на угол $150°$ против часовой стрелки.

1168 Точка O является точкой пересечения биссектрис равностороннего треугольника ABC. Докажите, что при повороте вокруг точки O на угол $120°$ треугольник ABC отображается на себя.

1169 Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол $90°$ квадрат отображается на себя.

1170 ☐ Постройте окружность, которая получается из данной окружности с центром C поворотом вокруг точки O на угол $60°$ против часовой стрелки, если: а) точки O и C не совпадают; б) точки O и C совпадают.

1171 ☐ Постройте прямую a_1, которая получается из данной прямой a поворотом вокруг точки O на угол $60°$ по часовой стрелке, если прямая a: а) не проходит через точку O; б) проходит через точку O.

Решение

а) Построим окружность с центром O, которая касается прямой a (объясните, как это сделать). Пусть M — точка касания. При повороте вокруг точки O эта окружность отображается на себя, а касательная a отображается на некоторую касательную a_1 (объясните почему). Для построения прямой a_1 построим сначала точку M_1, в которую отображается точка M при повороте вокруг точки O на угол $60°$ по часовой стрелке, а затем проведём касательную a_1 к окружности в точке M_1.

Вопросы для повторения к главе XIII

1 Объясните, что такое отображение плоскости на себя.

2 Какое отображение плоскости называется: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией?

3 Докажите, что осевая симметрия является отображением плоскости на себя.

4 Что такое движение (или перемещение) плоскости?

5 Докажите, что осевая симметрия является движением.

6 Является ли центральная симметрия движением?

7 Докажите, что при движении отрезок отображается на отрезок.

8 Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

9 Объясните, что такое наложение.

10 Докажите, что при наложении различные точки отображаются в различные точки.

11 Докажите, что наложение является движением плоскости.

12 Докажите, что любое движение является наложением.

13 Верно ли утверждение, что при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру?

14 Какое отображение плоскости называется параллельным переносом на данный вектор?

15 Докажите, что параллельный перенос является движением.

16 Какое отображение плоскости называется поворотом?

17 Докажите, что поворот является движением.

Дополнительные задачи

1172 При данном движении каждая из двух точек A и B отображается на себя. Докажите, что любая точка прямой AB отображается на себя.

1173 При данном движении каждая из вершин треугольника ABC отображается на себя. Докажите, что любая точка плоскости отображается на себя.

1174 Докажите, что два прямоугольника равны, если: а) смежные стороны одного прямоугольника соответственно равны смежным сторонам другого; б) сторона и диагональ одного прямоугольника соответственно равны стороне и диагонали другого.

1175 □ Даны прямая a и точки M и N, лежащие по одну сторону от нее. Докажите, что на прямой a существует единственная точка X, такая, что сумма расстояний $MX + XN$ имеет наименьшее значение.

1176 ☐ Даны острый угол ABC и точка D внутри него. Используя осевую симметрию, найдите на сторонах данного угла такие точки E и F, чтобы треугольник DEF имел наименьший периметр.

1177 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 являются соответственно серединами отрезков AM, BM и CM. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

Решение

Так как M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $AM = 2MA_1$. Отсюда, учитывая, что точка A_2 — середина отрезка AM, получаем $MA_1 = MA_2$, т. е. точки A_1 и A_2 симметричны относительно точки M. Аналогично точки B_1 и B_2, а также точки C_1 и C_2 симметричны относительно точки M. Рассмотрим центральную симметрию относительно точки M. При этой симметрии точки A_1, B_1, C_1 отображаются в точки A_2, B_2, C_2, поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на треугольник $A_2B_2C_2$ и, следовательно, $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

1178 На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты так, как показано на рисунке 332. Используя параллельный перенос, докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне AD.

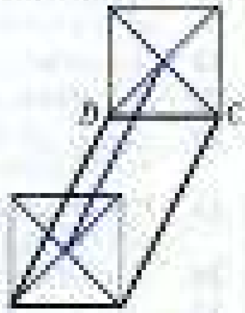


Рис. 332

1179* На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABS так, как показано на рисунке 333: $CC_1 \perp AS$, $DD_1 \perp BS$. Используя параллельный перенос, докажите, что прямые SK и AB взаимно перпендикулярны.

1180 В окружность с центром O вписаны два равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причём вершины обозначены так, что направление обхода по дуге ABC от точки A к точке C совпадает с направлением обхода по дуге $A_1B_1C_1$ от точки A_1 к точке C_1. Используя поворот вокруг точки O, докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо проходят через точку O, либо, пересекаясь, образуют равносторонний треугольник.

1181 ☐ Даны две пересекающиеся прямые и точка O, не лежащая ни на одной из них. Используя центральную симметрию, постройте прямую, проходящую через точку O, так, чтобы отрезок этой прямой, отсекаемый данными прямыми, делился точкой O пополам.

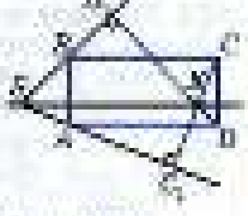


Рис. 333

1182. Используя параллельный перенос, постройте трапецию по её основаниям и диагоналям.

1183. □ Даны параллельные прямые b и c и точка A, не лежащая ни на одной из них. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на прямых b и c. Сколько решений имеет задача?

Решение

Допустим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен (рис. 334, а). При повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке вершина B отображается в вершину C, поэтому прямая b отображается на прямую b_1, проходящую через точку C. Прямую b_1 легко построить, не пользуясь точками B и C (см. задачу 1171). Построив прямую b_1, находим точку C, в которой прямая b_1 пересекается с прямой c. Затем, построив окружность с центром A радиуса AC, находим точку B. На рисунке 334, а выполнено построение.

Задача имеет два решения, одно из которых получается при повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке ($\triangle ABC$ на рисунке 334, а), а другое — при повороте плоскости на угол 60° против часовой стрелки ($\triangle AB'C'$ на рисунке 334, б).

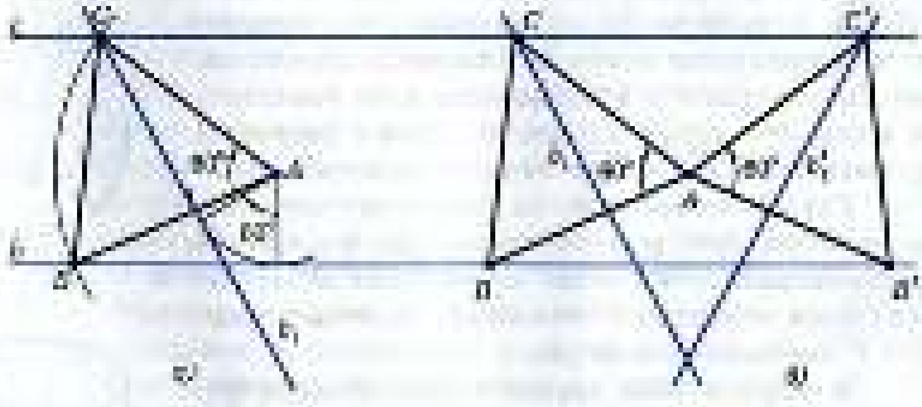


Рис. 334

Глава XIV

Начальные сведения из стереометрии

Последняя глава является введением в стереометрию — это тот раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Более основательно вы будете заниматься стереометрией в старших классах, а здесь мы познакомим вас с некоторыми пространственными фигурами и формулами для вычисления их объёмов и площадей поверхностей.

§ 1 Многогранники

122 Предмет стереометрии

До сих пор мы занимались планиметрией — изучали свойства плоских геометрических фигур, т. е. фигур, целиком расположенных в некоторой плоскости. Но окружающие нас предметы в большинстве своём не являются плоскими, они расположены в пространстве и не умещаются в какой-то одной плоскости. Любой реальный предмет занимает какую-то часть пространства.

Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве, называется **стереометрией**. Это слово происходит от греческих слов «стерео» — объёмный, пространственный и «метрео» — измерять.

В стереометрии наряду с простейшими фигурами — точками, прямыми и плоскостями рассматриваются **геометрические тела и их поверхности**. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются **многогранниками**. Одним из простейших многогранников является куб (рис. 335, а). Он составлен из шести равных квадратов. Капли жидкости в невесомо-

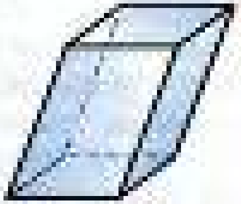
Рис. 335

сти принимают форму геометрического тела, называемого шаром (рис. 335, б). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого цилиндром (рис. 335, в).

Рис. 336

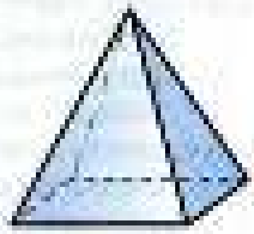
В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделённую от остальной части пространства поверхностью — границей этого тела. Так, например, граница шара есть сфера, а граница цилиндра состоит из двух кругов — оснований цилиндра и боковой поверхности.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется **секущей плоскостью** этого тела. Фигура, которая образуется при пересечении тела с секущей плоскостью (т. е. общая часть тела и секущей плоскости), называется **сечением** тела. Так, например, сечением шара является круг (рис. 336).

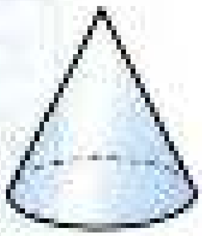


а) Параллелепипед

При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит её проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирают то из них, которое создаёт правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования её свойств. На рисунках 337, а, б изображены два многогранника — параллелепипед и пирамида, а на рисунке 337, в — конус. Невидимые части фигур изображены штриховыми линиями.



б) Пирамида



в) Конус

Рис. 337

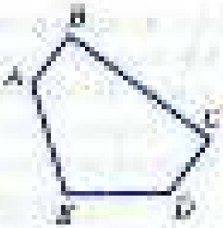
В этой главе мы рассмотрим некоторые виды многогранников и тела вращения — цилиндр, конус, шар, приведём формулы, по которым вычисляются их объёмы и площади поверхностей. При этом мы будем опираться в основном на наглядные представления. Более полное обоснование указанных фактов и формул будет дано в систематическом курсе стереометрии, изучаемом в 10—11 классах.

123 Многогранник

Напомним, что в планиметрии при изучении многоугольников мы рассматривали многоугольник либо как замкнутую линию, составленную из отрезков и не имеющую самопересечений (рис. 338, а), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая её саму (рис. 338, б). При изучении многогранников мы будем пользоваться вторым толкованием многоугольника.

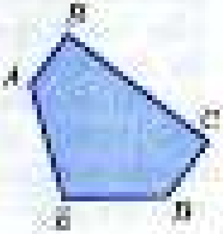
С одним из самых простых многогранников — прямоугольным параллелепипедом — вы знакомы давно. Этот многогранник составлен из шести прямоугольников (рис. 339, а). Форму прямоугольного параллелепипеда имеют коробки, комнаты и многие другие предметы. На рисунках 339, б, в, г изображены другие многогранники: куб (это прямоугольный параллелепипед, составленный из шести равных квадратов), тетраэдр, октаэдр.

Можно сказать, что многогранник — это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. Это тело также называется многогранником.



Многоугольник ABCDE — фигура, составленная из отрезков

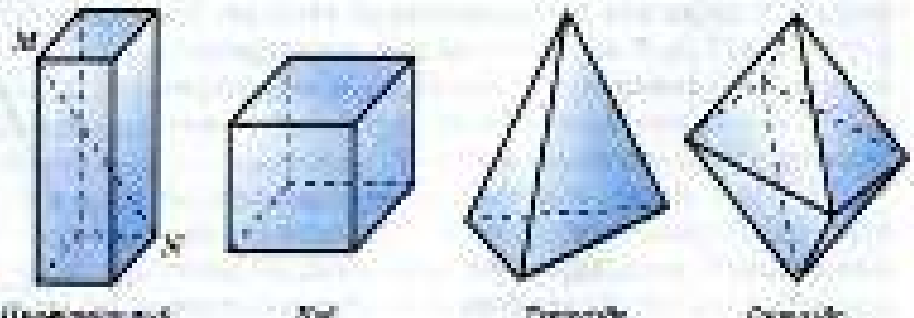
а)



Многоугольник ABCDE — часть плоскости, ограниченная линией ABCDE

б)

Рис. 338



Прямоугольный параллелепипед — а)

Куб — б)

Тетраэдр — в)

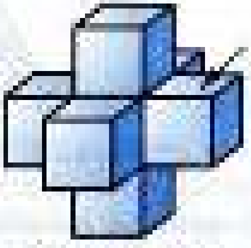
Октаэдр — г)

Рис. 339

Тетраэдр и октаэдр (рис. 339, а, г) составлены соответственно из четырёх и восьми треугольников, что отражено и в названиях этих многогранников: по-гречески «тетра» — четыре, а «окто» — восемь.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**. При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости. Гранями прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольники, а гранями тетраэдра и октаэдра — треугольники. Стороны граней называются **рёбрами**, а концы рёбер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника. На рисунке 339, в отрезок MN — диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Многогранники бывают **выпуклыми** и **невыпуклыми**. Выпуклый многогранник характеризуется тем, что он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани. На рисунке 339 изображены выпуклые многогранники, а на рисунке 340 — невыпуклый многогранник.

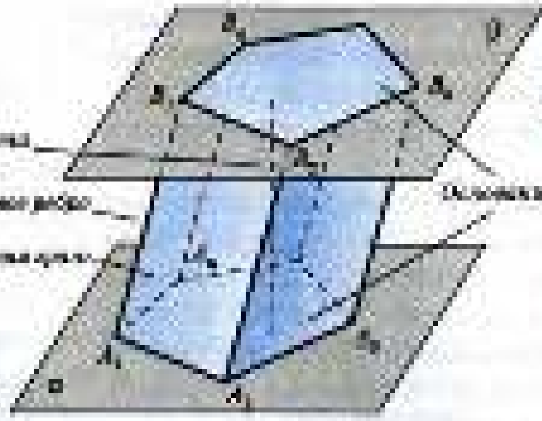


Невыпуклый многогранник, составленный из кубиков. Плоскость грани, отмеченной стрелкой, разделяет этот многогранник на две части, лежащие по разные стороны от этой плоскости

Рис. 340

124 Призма

Многогранник, называемый **призмой**, можно построить следующим образом. Рассмотрим параллельные плоскости α и β, т. е. такие плоскости, которые не имеют общих точек. В плоскости α возьмём какой-нибудь многоугольник $A_1A_2...A_n$, а в плоскости β — равный ему многоугольник $B_1B_2...B_n$ причём так, чтобы равные стороны A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3, ..., A_nA_1 и B_nB_1 этих многоугольников были параллельными сторонами четырёхугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (рис. 341).



Призма $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. Основания — многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$. Боковые грани — параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$

Рис. 341

Поясним, что понимается под параллельностью прямых в пространстве. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Указанные четырёхугольники являются параллелограммами. В самом деле, например, в четырёхугольнике $A_1A_2B_2B_1$ противоположные стороны A_1A_2 и B_1B_2 по построению равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм.

n-угольной призмой называется многогранник $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$, составленный из двух равных n-угольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — **оснований** призмы и n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — **боковых граней** призмы. Отрезки A_1B_1, ..., A_nB_n называются **боковыми рёбрами** призмы. Все они равны и параллельны друг другу.

Призмы бывают прямыми и наклонными. Чтобы дать определение прямой призмы, введём понятие перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая a, пересекающая плоскость α в некоторой точке H (рис. 342), называется **перпендикулярной к этой плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α и проходящей через точку H. Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$.

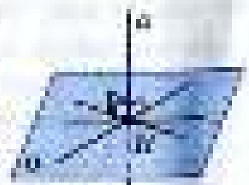
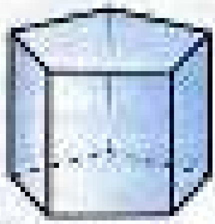


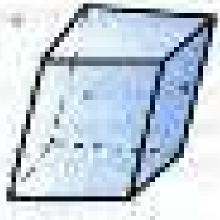
Рис. 342

Если все боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскостям её оснований, то призма называется **прямой** (рис. 343, а); в противном случае призма называется **наклонной** (рис. 343, б). Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной** (рис. 343, в).



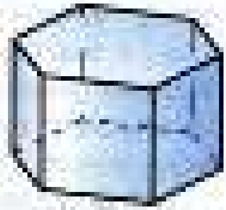
Прямая пятиугольная призма

а)



Наклонная четырёхугольная призма

б)



Правильная шестиугольная призма

в)

Рис. 343

Выберем произвольную точку A одного из оснований и проведём через неё прямую, перпендикулярную к плоскости другого основания и пересекающую её в точке B (рис. 344). Отрезок AB называется **высотой призмы**. В курсе стереометрии 10—11 классов доказывается, что все высоты призмы равны и параллельны друг другу.

125 Параллелепипед

Четырёхугольная призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется **параллелепипедом** (рис. 345). Все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы.

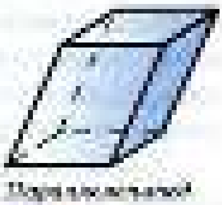
Отрезок AB — высота призмы

Рис. 344

Если параллелепипед прямой, т. е. его боковые рёбра перпендикулярны к плоскостям оснований, то боковые грани — прямоугольники. Если же и основаниями прямого параллелепипеда служат прямоугольники, то этот параллелепипед — **прямоугольный**.

Мы знаем, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Оказывается, что аналогичным свойством обладают диагонали параллелепипеда:

Четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.



Параллелепипед

Рис. 345

Доказательство этого утверждения основано на следующем факте: если две прямые в пре странстве параллельны третьей прямой, то они параллельны. В том случае, когда все три прямые лежат в одной плоскости, это утверждение было доказано в п. 28. В общем случае оно будет доказано в курсе стереометрии 10—11 классов.

Обратимся к рисунку 346, а, на котором изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Поскольку грани $ABCD$ и ADD_1A_1 — параллелограммы, то $BC \parallel AD$, $BC = AD$, $A_1D_1 \parallel AD$, $A_1D_1 = AD$. Из этого следует, что $BC = A_1D_1$ и $BC \parallel A_1D_1$, поэтому четырёхугольник A_1D_1CB — параллелограмм, и значит, его диагонали A_1C и D_1B, являющиеся также диагоналями параллелепипеда, пересекаются в некоторой точке O и делятся этой точкой пополам.

Аналогично доказывается, что четырёхугольник AD_1C_1B — параллелограмм (рис. 346, б), и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 параллелепипеда пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

Наконец, рассматривая четырёхугольник A_1B_1CD (рис. 346, в), точно так же устанавливаем, что и четвёртая диагональ DB_1 проходит через точку O и делится ею пополам.


Рис. 346

126 Объём тела

Понятие объёма тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры. Как мы помним, каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы измерения площадей. В качестве единицы измерения площадей обычно берут квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Аналогично будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объём, который можно измерить с помощью выбранной единицы единицу измерения объёмов. За единицу измерения объёмов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называется **кубическим сантиметром** и обозначается так: 1 см³. Аналогично определяется кубический метр (м³), кубический миллиметр (мм³) и т. д.

Процедура измерения объёмов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объём тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объёмов и её частей укладывается в этом теле. Ясно, что число, выражающее объём тела, зависит от выбора единицы измерения объёмов. Поэтому единица измерения объёмов указывается после этого числа.

Например, если в качестве единицы измерения объёмов взят 1 см³, и при этом объём V некоторого тела оказался равным 2, то пишут: $V = 2$ см³.

Если два тела равны, то каждое из них содержит столько же единиц измерения объёмов и её частей, сколько и другое тело. Таким образом,

1°. Равные тела имеют равные объёмы.

Рассмотрим тело, составленное из нескольких тел так, что внутренние области этих тел не имеют общих точек (рис. 347). Ясно, что объём всего тела складывается из объёмов составляющих его тел. Итак,

2°. Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

Свойства 1° и 2° называются **основными свойствами объёмов**. Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков и площади многоугольников.

Для нахождения объёмов тел в ряде случаев удобно пользоваться теоремой, получившей название **принцип Кавальери**[1]. Поясним, в чём

$V = V_1 + V_2$

Рис. 347

[1] Кавальери Бонавентура (1598—1647) — итальянский математик.

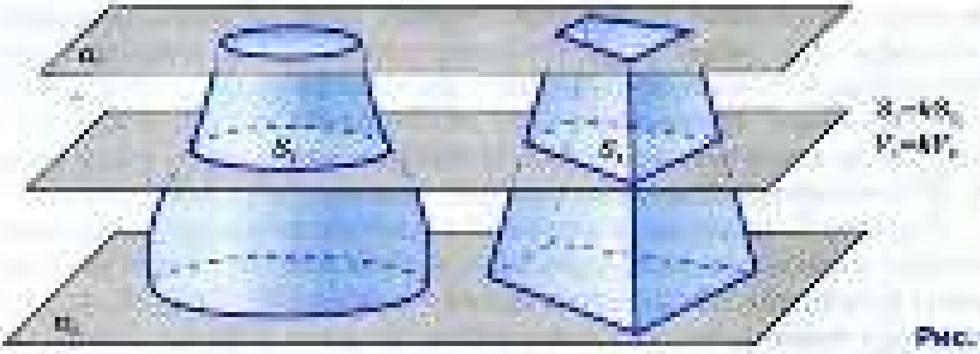


Рис. 348

состоит этот принцип. Рассмотрим два тела, заключённые между двумя параллельными плоскостями α_1 и α_2 (рис. 348). Допустим, что любая плоскость, расположенная между плоскостями α_1 и α_2 и параллельная им, пересекает оба тела так, что площадь сечения первого тела в k раз больше площади сечения второго тела, причём число k — одно и то же для любой такой секущей плоскости. В этом случае, согласно принципу Кавальери, объём первого тела в k раз больше объёма второго тела.

Доказательство теоремы, выражающей принцип Кавальери, основано на понятии определённого интеграла, которое будет введено в 11 классе в курсе алгебры и начал математического анализа. Мы примем эту теорему без доказательства.

127 Свойства прямоугольного параллелепипеда

Когда мы говорим о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, то обычно употребляем слова «длина», «ширина» и «высота», имея в виду длины трёх рёбер с общей вершиной. В геометрии эти три величины объединяются общим названием: измерения прямоугольного параллелепипеда. Так, у прямоугольного параллелепипеда, изображённого на рисунке 349, в качестве измерений можно взять длины рёбер AB, AD и AA_1.

У прямоугольника два измерения — длина и ширина. При этом, как мы знаем, **квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений.**

Оказывается, что аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед: **квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.**

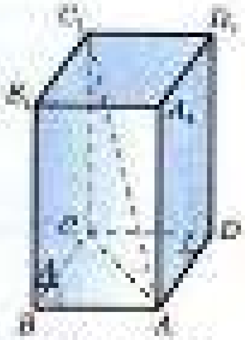


Рис. 349

В самом деле, обратимся к рисунку 349, на котором изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Ребро CC_1 перпендикулярно к плоскости грани $ABCD$, т. е. перпендикулярно к любой прямой, лежащей в плоскости этой грани и проходящей через точку C. Поэтому угол ACC_1 — прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по теореме Пифагора получаем: $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$.

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = BB_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$, что и требовалось доказать.

Остановимся ещё на одном свойстве, иллюстрирующем аналогию между прямоугольником и прямоугольным параллелепипедом. Мы знаем, что **площадь прямоугольника равна произведению его измерений.**

Оказывается, что аналогичное утверждение справедливо и для прямоугольного параллелепипеда: **объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.**

Для доказательства этого утверждения воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим сначала прямоугольный параллелепипед с измерениями a, b, 1 и куб с ребром 1, «стоящие» на плоскости α (рис. 350, a). Этот куб является еди-

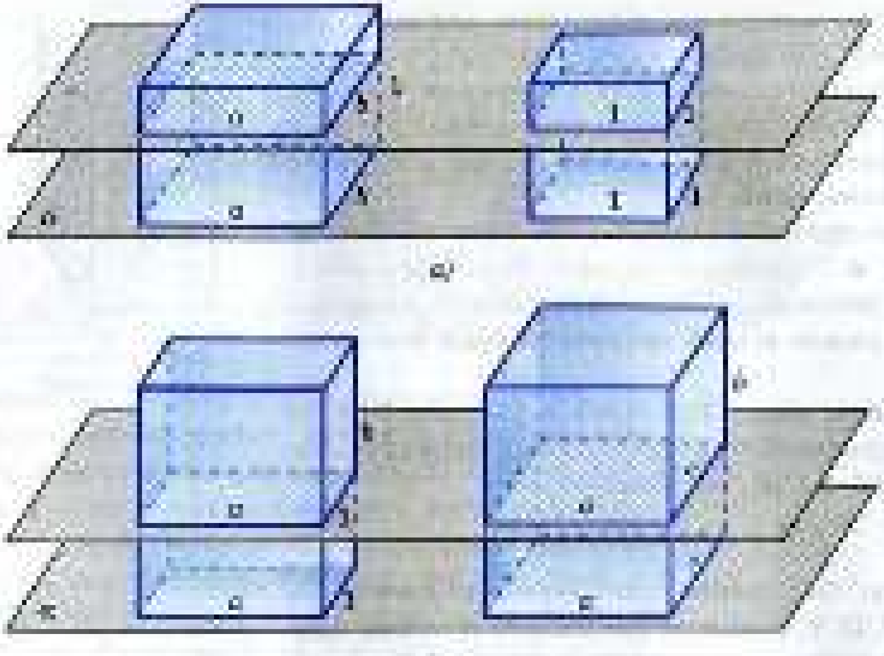


Рис. 350

иницей измерения объёмов, т. е. его объём равен 1. Любая секущая плоскость, параллельная плоскости α, даёт в качестве сечения куба квадрат площади 1, а в качестве сечения рассматриваемого параллелепипеда — прямоугольник площади ab (см. рис. 350, а). Следовательно, согласно принципу Кавальери, объём этого параллелепипеда в ab раз больше объёма куба, т. е. равен ab.

Рассмотрим теперь два прямоугольных параллелепипеда: один с измерениями a, b, 1, а другой — с измерениями a, b, c, стоящими на плоскости α так, как показано на рисунке 350, б. Объём первого параллелепипеда, как было доказано, равен ab. Докажем, что объём второго параллелепипеда равен abc.

Любая секущая плоскость, параллельная плоскости α, даёт в качестве сечения первого параллелепипеда прямоугольник площади ab, а в качестве сечения второго — прямоугольник площади ab (см. рис. 350, б). Поэтому объём V второго параллелепипеда в c раз больше объёма первого и, следовательно, равен $V = abc$, что и требовалось доказать.

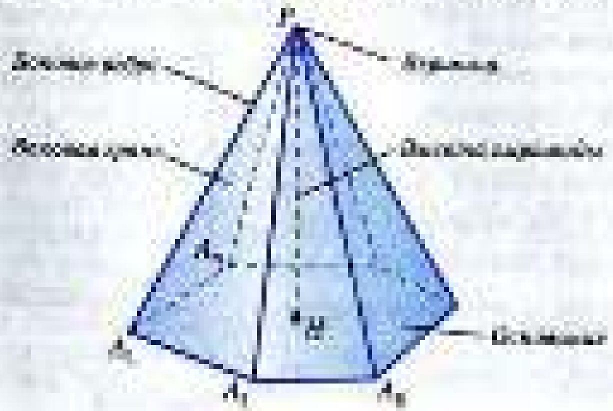
В прямоугольном параллелепипеде с измерениями a, b, c, изображённом на рисунке 350, б, площадь S основания равна ac, а высота h равна боковому ребру: $h = b$. Поэтому формулу $V = abc$ можно записать в виде $V = Sh$, т. е. **объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.**

Оказывается, что в точности такая же формула имеет место для любой призмы: **объём призмы равен произведению площади основания на высоту.**

Это утверждение нетрудно доказать с помощью принципа Кавальери (см. задачу 1198).

128 Пирамида

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника (рис. 351), получим n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1. Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и этих треугольников, называется



n-угольная пирамида $PA_1...A_n$

Рис. 351

пирамидой. Многоугольник $A_1A_2...A_n$ называется основанием пирамиды, а указанные треугольники — боковыми гранями пирамиды. Точка P называется вершиной пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — её боковыми рёбрами. Пирамиду с вершиной P и основанием $A_1A_2...A_n$ называют n-угольной пирамидой и обозначают так: $PA_1A_2...A_n$. На рисунке 352 изображены четырёхугольная и шестиугольная пирамиды. Треугольную пирамиду часто называют тетраэдром.

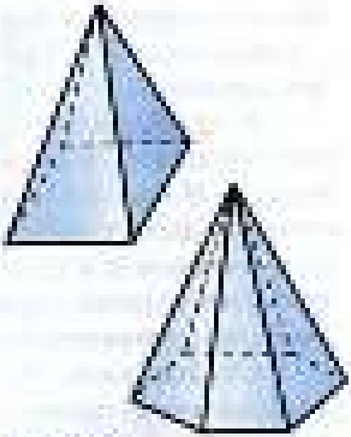


Рис. 352

Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с плоскостью её основания и перпендикулярный к этой плоскости, называется высотой пирамиды. На рисунке 351 отрезок PH — высота пирамиды.

Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется апофемой. На рисунке 353 отрезок PE — одна из апофем. Можно доказать, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу (задача 1205).

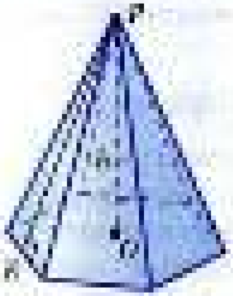


Рис. 353

Рассмотрим куб со стороной a и проведём его диагонали (рис. 354). В результате куб окажется разбитым на шесть равных друг другу правильных четырёхугольных пирамид с общей вершиной в точке пересечения диагоналей куба. У каждой из этих пирамид основанием является квадрат со стороной a, высота равна $\frac{a}{2}$, а объём в шесть раз меньше объёма куба, т. е. равен $\frac{a^3}{6}$. Но

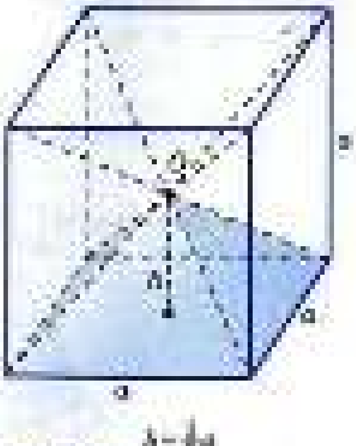


Рис. 354

$\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{3}Sh$, где $S = a^2$ — площадь основания пирамиды, $h = \frac{a}{2}$ — её высота. Таким образом, объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h равен одной трети произведения площади основания на высоту. Основываясь на этом факте, можно доказать (см. задачу 1210), что аналогичное утверждение справедливо и для произвольной пирамиды: **объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Задачи

1184 Сколько граней, рёбер и вершин имеет: а) прямоугольный параллелепипед; б) тетраэдр; в) октаэдр?

1185 Докажите, что число вершин любой призмы чётно, а число рёбер кратно 3.

1186 Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы (т. е. сумма площадей её боковых граней) равна произведению периметра основания на боковое ребро.

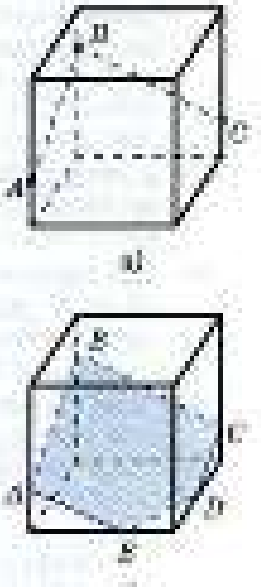
1187 Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань — прямоугольник; б) только две смежные грани — ромбы; в) все углы граней острые; г) все углы граней прямые; д) число всех острых углов граней не равно числу всех тупых углов граней?

1188 На трёх рёбрах параллелепипеда даны точки A, B и C. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эти точки.

Решение

При построении сечений параллелепипеда нужно руководствоваться следующим правилом (оно будет обосновано в курсе стереометрии в 10 классе): **отрезки, по которым секущая плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда, параллельны.**

1) Рассмотрим сначала случай расположения точек A, B и C, изображённый на рисунке 355, а. Проведём отрезки AB и BC.



а) б)

Рис. 355

Далее, руководствуясь указанным правилом, через точку A проводим в плоскости «передней» грани прямую, параллельную BC, а через точку C в плоскости боковой грани проводим прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки E и D (рис. 355, б). Остаётся провести отрезок DE, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.

2) Обратимся теперь к случаю, представленному на рисунке 356, а. Этот случай более трудный, чем предыдущий. Можно провести отрезки AB и BC (см. рис. 356, а), но что делать дальше? Поступим так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания параллелепипеда. С этой целью продолжим отрезок AB и нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и отрезок AB, до пересечения в точке M (рис. 356, б). Далее, через точку M проведём в плоскости нижнего основания прямую, параллельную BC. Это и есть та прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведём прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.

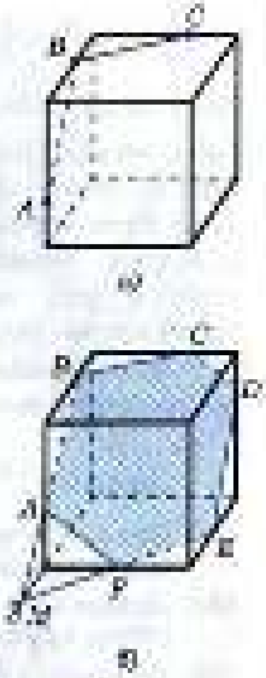


Рис. 356

1189 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечения плоскостью[1]: а) ABC_1; б) ACC_1. Докажите, что построенные сечения — параллелограммы.

1190 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M и N соответственно на рёбрах BB_1 и CC_1. Постройте точку пересечения: а) прямой MN с плоскостью ABC; б) прямой AM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

1191 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

[1] Для краткости записи плоскость, проходящую через точки A, B и C_1, мы называем плоскостью ABC_1; аналогичные обозначения плоскостей используются и в других задачах.

1192 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на рёбрах: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1.

1193 Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

1194 Ребро куба равно a. Найдите диагональ этого куба.

1195 Тело R состоит из тел P и Q, имеющих соответственно объёмы V_1 и V_2. Выразите объём V тела R через V_1 и V_2, если:
а) тела P и Q не имеют общих внутренних точек;
б) тела P и Q имеют общую часть, объём которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

1196 Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда.

1197 Найдите объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 13$ см, $BD = 12$ см и $BC_1 = 11$ см.

1198 Докажите, что объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим призму и прямоугольный параллелепипед с площадями оснований, равными S, и высотами, равными h, «стоящие» на одной плоскости (рис. 357).

Докажем, что объём призмы равен Sh. Любая секущая плоскость, параллельная плоскости оснований, даёт в качестве сечения призмы равный её основанию многоугольник площади S, а в качестве сечения прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник площади S. Следовательно, объём призмы равен объёму параллелепипеда. Но объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту, т. е. равен Sh. Поэтому и объём призмы равен Sh.

Рис. 357

1199 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см, а наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см².

1200 Найдите объём правильной n-угольной призмы, все рёбра которой равны a, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$.

1201 Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней — прямые?

1202 Изобразите тетраэдр $DABC$ и на рёбрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.

1203 Изобразите тетраэдр $KLMN$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN.

1204 Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точки M и N на рёбрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

1205 Докажите, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

1206 Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды (т. е. сумма площадей её боковых граней) равна половине произведения периметра основания на апофему.

1207 Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые рёбра пирамиды, если её высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

1208 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона её основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проходящего через вершину пирамиды и большую диагональ основания.

1209* Через точку H_1 высоты PH пирамиды $PA_1A_2...A_n$ проведена секущая плоскость β, параллельная плоскости α её основания.

Докажите, что площадь полученного сечения равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$, где S — площадь основания пирамиды.

Решение

Докажем это утверждение сначала для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

Рассмотрим треугольную пирамиду $PA_1A_2A_3$ и докажем, что рассматриваемое сечение представляет собой треугольник $B_1B_2B_3$, подобный треугольнику $A_1A_2A_3$ с коэффициентом подобия $k = \frac{PH_1}{PH}$ (рис. 358, а). Прямоугольные треугольники PHA_1 и PH_1B_1 подобны по двум углам (угол P — общий; $\angle PH_1B_1 = \angle PHA_1 = 90°$, так как в противном случае прямые

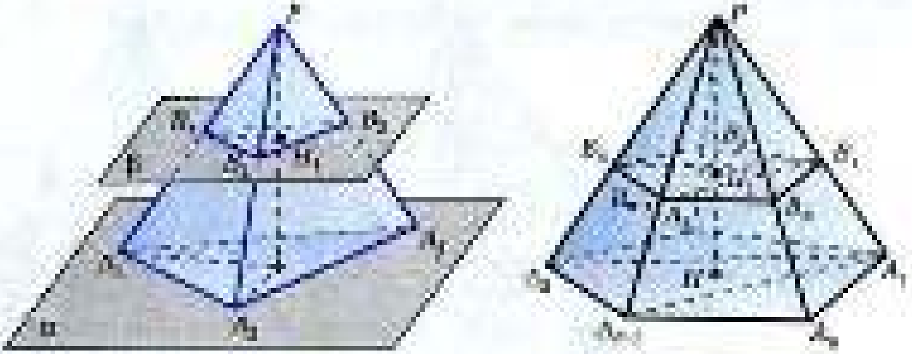


Рис. 358 а) б)

HA_1 и H_1B_1, а значит, и плоскости α и β пересекались бы, что противоречит условию), поэтому $\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{PH_1}{PH} = k$. Аналогично из подобия треугольников PHA_2 и PH_1B_2 находим: $\frac{PB_2}{PA_2} = \frac{PH_1}{PH}$. Таким образом, $\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{PB_2}{PA_2} = k$, откуда следует, что треугольники PB_1B_2 и PA_1A_2 подобны по второму признаку подобия треугольников. Поэтому $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = k$. Точно так же доказывается, что $\frac{B_2B_3}{A_2A_3} = k$ и $\frac{B_3B_1}{A_3A_1} = k$. Таким образом, треугольники $B_1B_2B_3$ и $A_1A_2A_3$ подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{PH_1}{PH}$, и, следовательно, площадь треугольника $B_1B_2B_3$ равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$.

Рассмотрим теперь произвольную пирамиду. Её можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой PH (на рисунке 358, б показано разбиение выпуклой пятиугольной пирамиды). Поэтому площадь сечения равна

$$S_{B_1B_2B_3} + \ldots + S_{B_1B_{n-1}B_n} =$$

$$= \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot (S_{A_1A_2A_3} + \ldots + S_{A_1A_{n-1}A_n}) = \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S.$$

1210 Докажите, что объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим две пирамиды, стоящие на одной плоскости: правильную пирами-

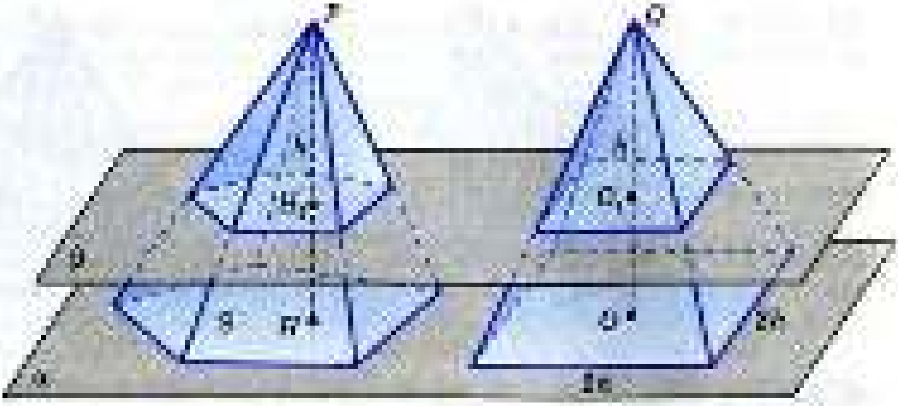


Рис. 359

ду с площадью основания S и высотой $PH = h$ и правильную четырёхугольную пирамиду с высотой $QO = h$ и стороной основания $2h$ (рис. 359). Согласно доказанному в п. 126 объём второй пирамиды равен $\frac{1}{3}(2h)^2 \cdot h = \frac{4}{3}h^3$. Требуется доказать, что объём V первой пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$.

Проведём секущую плоскость, параллельную плоскости оснований пирамид и пересекающую высоты PH и QO в точках H_1 и O_1 соответственно. Площадь сечения первой пирамиды равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$, а площадь сечения второй — $\left(\frac{QO_1}{QO}\right)^2 \cdot 4h^2$ (см. задачу 1209). По условию $PH = QO = h$. Интуитивно ясно также, что $PH_1 = QO_1$ (аккуратное доказательство этого факта будет дано в курсе стереометрии 10—11 классов).

Следовательно, площадь сечения первой пирамиды в $\frac{S}{4h^2}$ раз больше площади сечения второй пирамиды. Поэтому и её объём V в $\frac{S}{4h^2}$ раз больше, т. е. $V = \frac{S}{4h^2} \cdot \frac{4}{3}h^2 \cdot h = \frac{1}{3}Sh$, что и требовалось доказать.

1211 Найдите объём пирамиды с высотой h, если: а) $h = 2$ м, а основанием является квадрат со стороной 3 м; б) $h = 2,2$ м, а основанием является треугольник ABC, в котором $AB = 20$ см, $BC = 13,5$ см, $\angle ABC = 30°$.

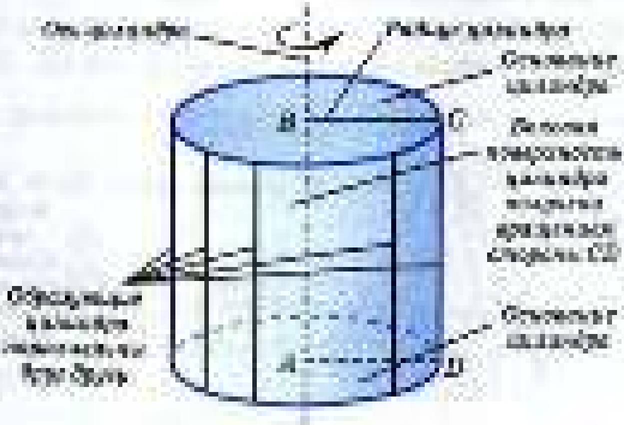
1212 Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона её основания равна m, а плоский угол (т. е. угол грани) при вершине равен α.

129 Цилиндр

Возьмём прямоугольник $ABCD$ и будем вращать его вокруг одной из сторон, например вокруг стороны AB (рис. 380). В результате получится тело, которое называется **цилиндром**. Прямая AB называется **осью цилиндра**, а отрезок AB — его **высотой**. При вращении сторон AD и BC образуются два равных круга — они называются **основаниями** цилиндра, а их радиус называется **радиусом** цилиндра. При вращении стороны CD образуется поверхность, состоящая из отрезков, параллельных оси цилиндра. Её называют **цилиндрической поверхностью** или **боковой поверхностью** цилиндра, а отрезки, из которых она составлена, — **образующими** цилиндра. Таким образом, цилиндр — это тело, ограниченное двумя равными кругами и цилиндрической поверхностью.

Пользуясь принципом Кавальери, можно доказать (см. задачу 1213), что **объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту**.

На рисунке 381, а изображён цилиндр с радиусом r и высотой h. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей



Цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB

Рис. 380

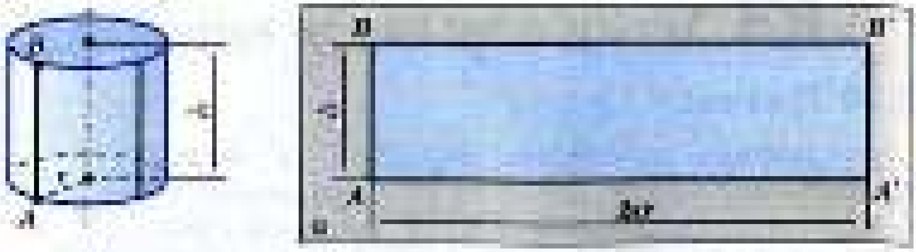


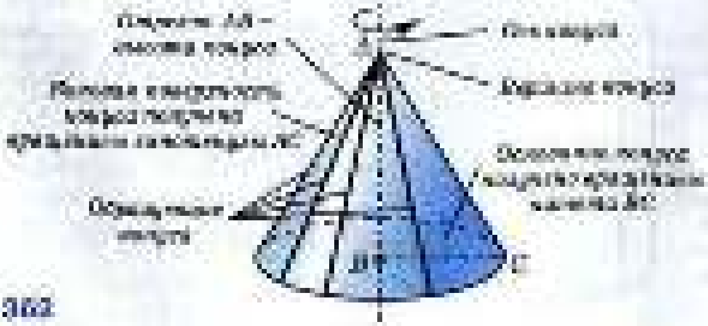
Рис. 361 а) б)

AB и развернули таким образом, что получился прямоугольник $ABB'A'$, стороны AB и $A'B'$ которого являются двумя краями разреза боковой поверхности цилиндра (рис. 361, б). Этот прямоугольник называется **развёрткой боковой поверхности цилиндра**. Сторона AA' прямоугольника равна длине окружности основания, а сторона AB равна высоте цилиндра, т. е. $AA' = 2\pi r$, $AB = h$.

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра равна площади её развёртки, т. е. $S_{бок} = 2\pi rh$.

130 Конус

Возьмём прямоугольный треугольник ABC и будем вращать его вокруг катета AB (рис. 362). В результате получится тело, которое называется **конусом**. Прямая AB называется **осью** конуса, а отрезок AB — его **высотой**. При вращении катета BC образуется круг, он называется **основанием** конуса. При вращении гипотенузы AC образуется



Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB

Рис. 362

поверхность, состоящая из отрезков с общим концом A. Её называют **конической поверхностью** или **боковой поверхностью** конуса, а отрезки, из которых она составлена, — **образующими конуса**. Таким образом, конус — это тело, ограниченное кругом и конической поверхностью.

Пользуясь принципом Кавальери, можно доказать (см. задачу 1219), что **объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту**.

Иначе говоря, *объём* V конуса выражается формулой $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания конуса, h — его высота.

Рассмотрим теперь конус, у которого радиус основания равен r, а образующая равна l (рис. 368, а). Его боковую поверхность можно развернуть на плоскость, разрезав её по одной из образующих. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор (рис. 368, б). Радиус этого сектора равен образующей конуса, т. е. равен l, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\pi r$.

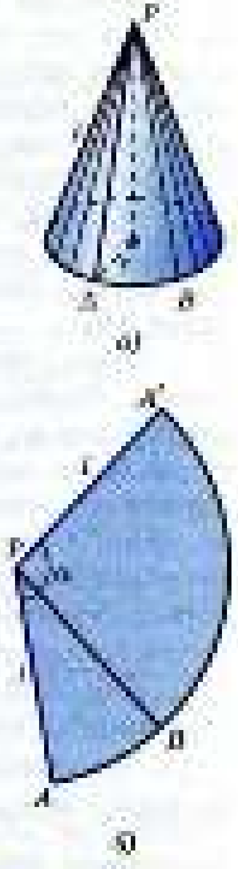


Рис. 368

Площадь $S_{бок}$ **боковой поверхности конуса** равна площади её развёртки, т. е.

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha,$$

где α — градусная мера дуги сектора (см. рис. 368, б). Длина дуги окружности с градусной мерой α и радиусом l равна $\frac{\pi l \alpha}{180}$. С другой стороны, длина этой дуги равна $2\pi r$, т. е. $\frac{\pi l \alpha}{180} = 2\pi r$. Поэтому $S_{бок} = \frac{\pi l \alpha}{180} \cdot \frac{l}{2} = 2\pi r \cdot \frac{l}{2} = \pi r l$.

Итак, площадь боковой поверхности конуса с образующей l и радиусом основания r выражается формулой:

$$S_{бок} = \pi r l.$$

131 Сфера и шар

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 364). Данная точка называется **центром** сферы (точка O на рисунке 364), а данное расстояние — **радиусом** сферы (на рисунке 364 радиус сферы обозначен буквой R). Любой отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо её точкой, также называется радиусом сферы.

Рис. 364

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется **диаметром** сферы. Ясно, что диаметр сферы радиуса R равен $2R$.

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара. Ясно, что шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и саму точку O), и не содержит других точек. Отметим также, что шар может быть получен вращением полукруга вокруг его диаметра (рис. 365). При этом сфера образуется в результате вращения полуокружности.

Шар получен вращением полукруга ACB вокруг диаметра AB

Рис. 365

Пользуясь принципом Кавальери, можно доказать, что **объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$** (см. задачу 1224).

В отличие от боковых поверхностей цилиндра и конуса сферу нельзя развернуть так, чтобы получилась плоская фигура. Поэтому для сферы непригоден способ вычисления площади с помощью развёртки. Вопрос о том, что понимать под площадью сферы и как её вычислить, будет рассмотрен в курсе стереометрии в 11 классе. Здесь же отметим, что для площади S сферы радиуса R получается формула:

$$S = 4\pi R^2.$$

Один из возможных способов получения этой формулы дает задача 1235.

Задачи

1213 Докажите, что объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим цилиндр и призму с площадями оснований, равными S, и высотами, равными h, «стоящие» на одной плоскости (рис. 366). Любая секущая плоскость, параллельная этой плоскости, даёт в качестве сечения цилиндра круг площади S, а в качестве сечения призмы — многоугольник площади S. Значит, объём цилиндра равен объёму призмы. Но объём призмы равен Sh. Поэтому и объём цилиндра равен Sh.

1214 Пусть V, r и h — соответственно объём, радиус и высота цилиндра. Найдите: а) V, если $r = 2\sqrt{2}$ см, $h = 3$ см; б) r, если $V = 120$ см^3, $h = 3{,}6$ см; в) h, если $r = h$, $V = 8\pi$ см^3.

1215 В цилиндр вписана правильная n-угольная призма (т. е. основания призмы вписаны в основания цилиндра). Найдите отношение объёмов призмы и цилиндра, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n — произвольное натуральное число.

1216 Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

1217 Сколько квадратных метров листовой жести пойдёт на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади её боковой поверхности?

1218 Один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а другой цилиндр — вращением этого же прямоугольника вокруг прямой BC. а) Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. б) Найдите

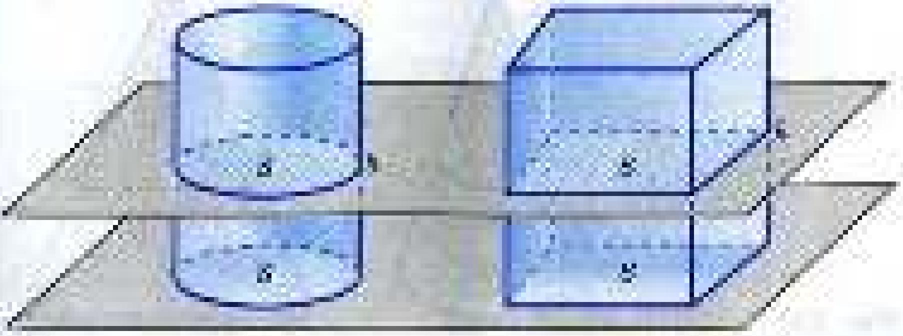


Рис. 366

отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, если $AB = a$, $BC = b$.

1219* Докажите, что объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим конус и пирамиду с площадями оснований S и высотами $PH = h$ и $QO = h$ соответственно, «стоящие» на одной плоскости α (рис. 367). Докажем, что объём конуса равен $\frac{1}{3}Sh$.

Проведём секущую плоскость β, параллельную плоскости α и пересекающую высоты PH и QO в точках H_1 и O_1 соответственно. В сечении конуса плоскостью β получится круг радиуса H_1A_1. Треугольники PH_1A_1 и PHA подобны по двум углам ($\angle P$ — общий, $\angle PH_1A_1 = \angle PHA = 90°$, так как в противном случае прямые HA и H_1A_1, а значит, и плоскости α и β пересекались бы, что противоречит условию). Поэтому $\frac{H_1A_1}{HA} = \frac{PH_1}{PH}$, откуда $H_1A_1 = \frac{PH_1}{PH} \cdot HA$, и площадь сечения конуса равна

$$\pi H_1A_1^2 = \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot \pi HA^2 = \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S.$$

Площадь сечения пирамиды равна $\left(\frac{QO_1}{QO}\right)^2 \cdot S$ (см. задачу 1208). По условию $PH = QO = h$. Интуитивно ясно также, что $PH_1 = QO_1$ (аккуратное доказательство этого факта будет дано в курсе стереометрии 10—11 классов).

Следовательно, площадь сечения конуса равна площади сечения пирамиды. Поэтому и его объём равен объёму пирамиды, т. е. равен $\frac{1}{3}Sh$, что и требовалось доказать.

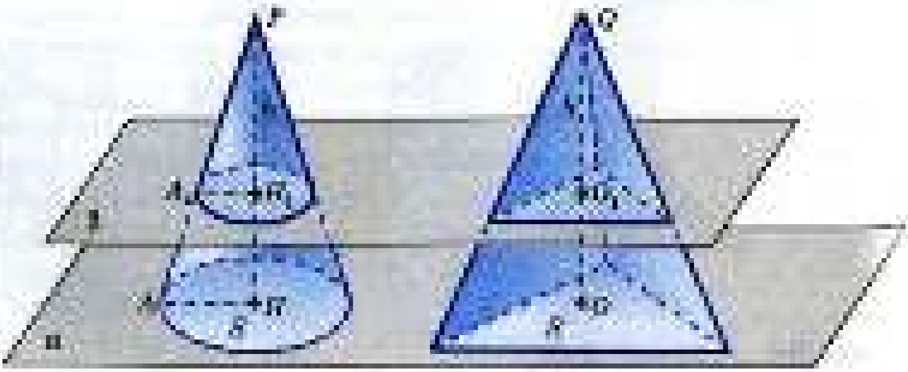


Рис. 367

1220 Пусть h, r и V — соответственно высота, радиус основания и объём конуса. Найдите: а) V, если $h = 3$ см, $r = 1,5$ см; б) h, если $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см^3; в) r, если $h = m$, $V = p$.

1221 Найдите объём конуса, если площадь его основания равна Q, а площадь боковой поверхности равна P.

1222 Площадь полной поверхности конуса равна 45π дм^2. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор с дугой в $60°$. Найдите объём конуса.

1223 Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

1224* Докажите, что объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Решение

Рассмотрим два тела: половину шара радиуса R и тело T, представляющее собой цилиндр радиуса R с высотой R, из которого вырезан конус с радиусом основания и высотой R. Представим себе, что оба тела стоят на плоскости α так, как показано на рисунке 368. Проведём секущую плоскость β, параллельную плоскости α и пересекающую радиус шара OA, перпендикулярный к плоскости α, в точке A_1, а высоту BH конуса — в точке B_1.

Сечение половины шара представляет собой круг радиуса $\sqrt{R^2 - OA_1^2}$ (см. рис. 368). Поэтому площадь этого круга равна $\pi(R^2 - OA_1^2)$.

Сечение тела T представляет собой кольцо, площадь которого равна разности площадей двух кругов: круга радиуса R и круга радиуса B_1B_2 (см. рис. 368), т. е. равна $\pi(R^2 - B_1B_2^2)$. Но $B_1B_2 = BB_1$ (объясните почему) и, кроме того, $BB_1 = OA_1$ (доказательство этого наглядно очевидного факта будет приведено в курсе стереометрии 10—11 классов).

Таким образом, площадь сечения половины шара равна площади сечения тела T. Поэтому и объём половины шара равен

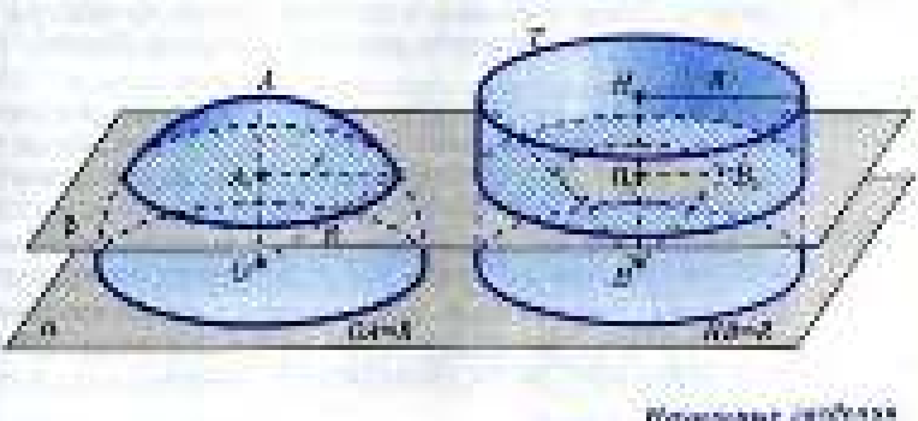


Рис. 368

объёму этого тела. В свою очередь, объём V тела T можно вычислить как разность объёмов цилиндра и конуса:

$$V = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Итак, объём половины шара равен $\frac{2}{3}\pi R^3$ и, следовательно, объём всего шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

1225 Сферу радиуса R покрасили слоем краски толщины d. Слоем такой же толщины покрасили многоугольник и затратили при этом такое же количество краски. Найдите площадь многоугольника.

Решение

Если толщина слоя краски равна d, то объём краски, затраченной на покраску сферы, равен разности объёмов двух шаров: шара радиуса $R + d$ и шара радиуса R, т. е. равен

$$\frac{4}{3}\pi(R+d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi d(3R^2 + 3Rd + d^2).$$

При покраске многоугольника площади S слоем толщины d объём затраченной краски равен Sd, поскольку объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

Приравнивая эти два объёма и сокращая на d, находим S:

$$S = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Rd + d^2).$$

Замечание

Если толщина d слоя краски очень мала по сравнению с радиусом R сферы, то величина S приблизительно равна $\frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = \frac{4}{3}\pi R^2$. Основываясь на проведённых рассуждениях, естественно принять за площадь сферы величину $4\pi R^2$.

1226 Пусть V — объём шара радиуса R, S — площадь его поверхности. Найдите: а) S и V, если $R = 4$ см; б) R и S, если $V = 113{,}04$ см^3; в) R и V, если $S = 64\pi$ см^2.

1227 Диаметр Луны составляет (приближённо) четвёртую часть диаметра Земли. Сравните объёмы Луны и Земли, считая их шарами.

1228 Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

1229 Сколько кожи пойдёт на покрышку футбольного мяча радиуса 10 см (на швы добавить 8% от площади поверхности мяча)?

1230 Докажите, что площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, высота которого равна диаметру сферы, а диаметр основания равен образующей конуса.

1231 Отношение объёмов двух шаров равно 8. Как относятся площади их поверхностей?

Вопросы для повторения к главе XIV

1 Объясните, что такое многогранник; что такое грани, рёбра, вершины и диагонали многогранника. Приведите примеры многогранников.

2 Объясните, как построить многогранник, называемый n-угольной призмой; что такое основания, боковые грани, боковые рёбра и высота призмы.

3 Какая призма называется: а) прямой; б) правильной?

4 Объясните, что такое параллелепипед; какие многоугольники являются гранями: а) параллелепипеда; б) прямого параллелепипеда; в) прямоугольного параллелепипеда.

5 Докажите, что четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

6 Объясните, как измеряются объёмы тел; что показывает число, выражающее объём тела при выбранной единице измерения объёмов.

7 Сформулируйте основные свойства объёмов.

8 Объясните, в чём заключается принцип Кавальери.

9 Что такое измерения прямоугольного параллелепипеда? Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

10 Докажите, что объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

11 Какой формулой выражается объём призмы?

12 Объясните, какой многогранник называется n-угольной пирамидой; что такое основание, боковые грани, вершина, боковые рёбра и высота пирамиды.

13 Объясните, какая пирамида называется правильной; что такое апофема правильной пирамиды.

14 Какой формулой выражается объём пирамиды?

15 Объясните, какое тело называется цилиндром; что такое ось, высота, основания, радиус, боковая поверхность, образующие цилиндра.

16 Какой формулой выражается объём цилиндра?

17 Объясните, как получается и что представляет собой развёртка боковой поверхности цилиндра.

18 Какой формулой выражается площадь боковой поверхности цилиндра?

19 Объясните, какое тело называется конусом; что такое ось, вершина, основание, боковая поверхность, образующие конуса.

30 Какой формулой выражается объём конуса?

31 Объясните, как получается и что представляет собой развёртка боковой поверхности конуса.

32 Какой формулой выражается площадь боковой поверхности конуса?

33 Что называется сферой и что такое её центр, радиус и диаметр?

34 Какое тело называется шаром и что такое его центр, радиус и диаметр?

35 Какой формулой выражается объём шара?

36 Какой формулой выражается площадь сферы?

Дополнительные задачи

1232 Докажите, что диагональ параллелепипеда меньше суммы трёх рёбер, имеющих общую вершину.

1233 Докажите, что сумма квадратов четырёх диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его рёбер.

1234 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте:
а) его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются;
б) его сечение плоскостью, проходящей через ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D.

1235 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью BKL, где K — середина ребра AA_1, а L — середина ребра CC_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

1236 Сумма площадей трёх граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2, а его рёбра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

1237 Найдите объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) $AC = 12$ см; б) $AC_1 = 8\sqrt{2}$; в) $DE = 1$ см, где E — середина ребра AB.

1238 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$ и $BB_1 = BD$, где BD — высота треугольника ABC.

1239 Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30°. Найдите объём призмы.

1240 Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точку K на ребре DC и точки M и N граней ABC и ACD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

1241 Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь поверхности пирамиды, т. е. сумму площадей всех её граней.

1242 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

1243 В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а сторона основания равна a. Найдите объём пирамиды.

1244 Алюминиевый провод диаметром 4 мм имеет массу 6,8 кг. Найдите длину провода (плотность алюминия равна 2,6 г/см³).

1245 Свинцовая труба (плотность свинца равна 11,4 г/см³) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если её длина равна 25 м?

1246 Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см². Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

1247 Из квадрата, диагональ которого равна d, свёрнута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания цилиндра.

1248 Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём этого конуса, если объём отсекаемого от него конуса равен 24 см³.

1249 Высота конуса равна 12 см, а его объём равен 324π см³. Найдите дугу развёртки боковой поверхности этого конуса.

1250 Вычислите площадь основания и высоту конуса, если развёрткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 9 см, а дуга равна 120°.

1251 Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна m, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при этом вращении.

1252 Шар и цилиндр имеют равные объёмы, а диаметр шара равен диаметру цилиндра. Выразите высоту цилиндра через радиус шара.

1253 В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до некоторого уровня, опускают 4 равных металлических шарика диаметром 1 см. На сколько изменится уровень воды в мензурке?

1254 Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша (радиус Земли считать равным 6375 км)?

1255 В каком отношении находятся объёмы двух шаров, если площади их поверхностей относятся как $m^2 : n^2$?

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе X

1256 Вершины четырёхугольника $ABCD$ имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ и $D(x_4; y_4)$. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ и $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

1257 Даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что координаты $(x; y)$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ (т. е. $\frac{AC}{CB} = \lambda$), выражаются формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

1258 Из физики известно, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан. Найдите координаты центра тяжести такой пластинки, если координаты её вершин равны: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$.

1259 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(8; 0)$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

1260 В треугольнике ABC $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. Медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найдите AB.

1261 Найдите координаты центра тяжести системы трёх масс m_1, m_2 и m_3, сосредоточенных соответственно в точках $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$.

1262 В каждом из следующих случаев на оси абсцисс найдите точку M, для которой сумма её расстояний от точек A и B имеет наименьшее значение:
а) $A(2; 3)$, $B(4; -5)$;
б) $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$.

1263 Докажите, что:
а) уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не равны нулю, является уравнением прямой;
б) уравнение $x^2 - xy - 2 = 0$ не является уравнением окружности.

1264 Найдите точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 1$, и вычислите длину их общей хорды.

1265 Даны три точки A, B, C и три числа α, β, γ. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых сумма $\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2$ имеет постоянное значение, если:
а) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$;
б) $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

1266 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. Для каждой точки M_1 прямой a на луче AM_1 взята такая точка M, что $AM_1 \cdot AM = k$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1267 Точка O не лежит на данной окружности. Для каждой точки M_1 окружности на луче OM_1 взята такая точка M, что $OM = k \cdot OM_1$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1268 Пусть A и B — данные точки, k — данное положительное число, не равное 1.

а) Докажите, что множество всех точек M, удовлетворяющих условию $AM = kBM$, есть окружность (окружность Аполлония).

б) Докажите, что эта окружность пересекается с любой окружностью, проходящей через точки A и B, так, что их радиусы, проведённые в точку пересечения, взаимно перпендикулярны.

Задачи к главе XI

1269 На сторонах квадрата $MNPQ$ взяты точки A и B так, что $NA = \frac{1}{2}MN$, $QB = \frac{1}{3}MN$ (рис. 369). Докажите, что $\angle AMB = 45°$.

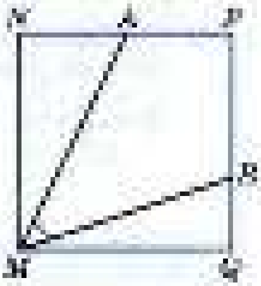


Рис. 369

1270 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Площадь треугольника ODC есть среднее пропорциональное между площадями треугольников OBC и OAD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC или параллелограмм.

1271 Докажите, что площадь S произвольного четырёхугольника со сторонами a, b, c, d (последовательно) удовлетворяет неравенству $S \leq \frac{1}{2}(ac + bd)$.

1272 Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса AA_1 вычисляется по формуле $AA_1 = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$, где $b = AC$, $c = AB$.

1273 Выразите диагонали вписанного в окружность четырёхугольника через его стороны.

1274 Докажите, что площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, может быть вычислена по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p — полупериметр, a, b, c, d — стороны четырёхугольника.

1275 Докажите, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис треугольника.

1276 В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание AD равно 3, а боковая сторона CD, не перпендикулярная к основаниям, равна 6. Точка E — середина отрезка CD, угол CBE равен α. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

1277 В остроугольном треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, отрезки AM и CN — высоты треугольника, точка O — центр описанной окружности. Угол ABC равен β, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите сторону AC.

1278 В треугольнике ABC проведены высота AH длиной h, медиана AM длиной l, биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Задачи к главе XII

1279 На рисунке 370 изображён правильный десятиугольник, вписанный в окружность радиуса R, AC — биссектриса угла OAB. Докажите, что: а) $\triangle ABC \sim \triangle OAB$; б) $AB = AC = OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

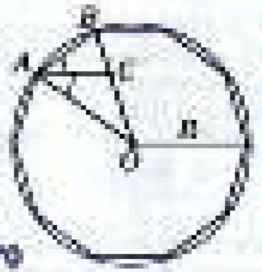


Рис. 370

Рис. 371

1280 Докажите, что отрезок AK, изображённый на рисунке 371, равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность с центром O.

1281 Около правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ описана окружность с центром O. Вершинами треугольника ABC являются середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 пятиугольника. Докажите, что центр O данной окружности и центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, симметричны относительно прямой AC.

1282* В данную окружность впишите правильный десятиугольник.

1283 В данную окружность впишите правильный пятиугольник.

1284 В данную окружность впишите пятиконечную звезду.

1285 Пусть M — произвольная точка, лежащая внутри правильного n-угольника. Докажите, что сумма перпендикуляров, проведённых из точки M к прямым, содержащим стороны n-угольника, равна nr, где r — радиус вписанной окружности.

1286 Углы треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что середины сторон и основания высот этого треугольника являются шестью вершинами правильного семиугольника.

1287 Пусть $ABCD$ — квадрат, а $A_1B_1C_1$ — правильный треугольник, вписанные в окружность радиуса R. Докажите, что сумма $AB + A_1B_1$ равна длине полуокружности с точностью до $0{,}01R$.

1288 По данным рисунка 372 докажите, что длина отрезка AC равна длине окружности с центром O радиуса R с точностью до $0{,}001R$.

Рис. 372

1289 На рисунке 373 изображены четыре полуокружности: AKB, AKC, CFD, DLB, причём $AC = DB$. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна площади круга, построенного на отрезке EF как на диаметре.

1290 Постройте границу круга, площадь которого равна:
а) площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями;
б) площади данного полукруга;
в) площади данного кругового сектора, ограниченного дугой в 60°.

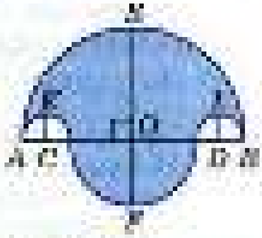


Рис. 373

Задачи к главе XIII

1291 При данном движении g точка A отображается в точку B, а точка B — в точку A. Докажите, что g — центральная симметрия или осевая симметрия.

1292 Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Докажите, что существуют два и только два движения, при которых точки A и B отображаются соответственно в точки A_1 и B_1.

1293 Докажите, что два параллелограмма равны, если диагонали и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны диагоналям и углу между ними другого.

1294 Докажите, что две трапеции равны, если основания и боковые стороны одной трапеции соответственно равны основаниям и боковым сторонам другой.

1295 Докажите, что два треугольника равны, если две стороны и разность противолежащих им углов одного треугольника соответственно равны двум сторонам и разности противолежащих им углов другого.

1296 Вершины одного параллелограмма лежат соответственно на сторонах другого параллелограмма. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

1297 □ Даны две окружности и прямая. Постройте правильный треугольник так, чтобы две вершины лежали соответственно на данных окружностях, а высота, проведённая из третьей вершины, — на данной прямой.

1298 □ На стороне угла AOB с недоступной вершиной дана точка M. Постройте отрезок, равный отрезку OM.

1299 Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок, концы которого лежат соответственно на данных окружностях, а его середина совпадает с одной из точек пересечения данных окружностей.

1300 Постройте треугольник по трём медианам.

1301 Постройте трапецию, стороны которой соответственно равны данным отрезкам.

1302 □ Даны точки A и B и две пересекающиеся прямые c и d. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы вершины C и D лежали соответственно на прямых c и d.

1303 □ Даны прямая, окружность и точка A, не лежащая на них. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина B лежала на данной прямой, а вершина D — на данной окружности.

Задачи к главе XIV

1304 Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине O — прямые. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственная теорема Пифагора).

1305 Докажите, что сечением куба может быть правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник.

1306 Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от него вершин куба. Как должен двигаться паук?

1307 Докажите, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие, через которое можно протащить куб таких же размеров.

1308 Плоскости AB_1C_1 и A_1BC разбивают правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на четыре части. Найдите объёмы этих частей, если объём призмы равен V.

1309 Докажите, что плоскость, проходящая через ребро и середину противоположного ребра тетраэдра, разделяет его на две части, объёмы которых равны.

1310 Правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания a и плоским углом α при вершине вращается вокруг прямой, проходящей через вершину параллельно стороне основания. Найдите объём полученного тела.

Исследовательские задачи

Предлагаемые задачи ориентированы на проведение исследований, связанных как с решением некоторых задач из учебника, так и с постановкой новых задач.

7 класс

1 Сформулируйте новые признаки равенства треугольников, используя не только стороны и углы, но также медианы, биссектрисы и высоты треугольников. Примеры таких признаков дают задачи **161, 170, 329**.
Эта задача может быть поставлена перед группой учащихся: создать банк признаков равенства треугольников; может использоваться как предмет интеллектуального соревнования между двумя или несколькими группами учащихся.

2 Сформулируйте признаки равенства равнобедренных треугольников.

3 Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

4 Для каждого из новых признаков равенства треугольников рассмотрите задачу на построение: построить с помощью циркуля и линейки треугольник по тем элементам, которые фигурируют в признаке.

8 класс

1 Задача **818** и её обобщение на случай невыпуклого четырёхугольника. (Предложите способ решения, применимый для любого четырёхугольника.)

2 Теорема Птолемея и ряд задач, решаемых с её помощью (задачи **862, 869, 893, 1256**). Предложите свои задачи на применение этой теоремы.

3 Окружность Эйлера (задача **886**). Дополнительно исследуйте, сколько точек, указанных в задаче **885**, могут быть различными.

4 Прямая Симсона (задача **890**). Исследуйте все возможные случаи.

5 Прямая Эйлера: докажите, что в любом неравностороннем треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений), центр описанной около треугольника окружности и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой. Установите, в каком отношении эти точки разделяют отрезок с концами в крайних точках.

9 класс

1 Проведите полное исследование задачи на построение треугольника ABC по углу A и сторонам AB и BC. При каких условиях задача:
а) имеет решение;
б) имеет единственное решение;
в) имеет не единственное решение (и сколько решений?);
г) не имеет решений?

2 Окружности Аполлония и их свойства (задачи **961, 1266**).

3 Использование движений в задачах на доказательство (задачи 1178—1180, 1281—1296).

4 Использование движений в задачах на построение (задачи 1181—1183, 1297—1303).

Темы рефератов

1 Характеристическое свойство фигуры. Характеристические свойства прямоугольника, ромба, квадрата, окружности.

2 Формулы площадей различных четырёхугольников.

3 Многоугольники на решётке. Формула Пика.

4 Изопериметрические задачи.

5 Теоремы Чевы и Менелая.

6 Прямая и окружность Эйлера.

7 Различные средние для нескольких отрезков.

8 Методы решения задач на построение (метод подобия, метод геометрических мест точек, использование движений).

9 Радикальная ось двух окружностей, радикальный центр трёх окружностей.

10 Вневписанные окружности.

11 Теорема Морли.

12 Использование движений при решении задач.

13 Центральное подобие и его применение (теорема Наполеона, прямая и окружность Эйлера, прямая Симсона).

14 Инверсия и её применения (теорема Птолемея и обратная ей, формула Эйлера для квадрата расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника, теорема Фейербаха, задача Аполлония).

Приложения

1 Об аксиомах планиметрии

При изучении геометрии мы опирались на ряд аксиом. Напомним, что аксиомами называются те основные положения геометрии, которые принимаются в качестве исходных. Вместе с так называемыми основными понятиями они образуют фундамент для построения геометрии. Первыми основными понятиями, с которыми мы познакомились, были понятия точки и прямой. Определения основных понятий не даются, а их свойства выражаются в аксиомах. Используя основные понятия и аксиомы, мы даём определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур.

Отметим, что не все аксиомы, необходимые для построения планиметрии, были приведены в нашем курсе — для упрощения изложения некоторые из них мы не формулировали, хотя ими и пользовались. Здесь же приведём все аксиомы планиметрии.

Первые три аксиомы характеризуют взаимное расположение точек и прямых.

1. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки[1].

2. Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Для точек, лежащих на одной прямой, мы использовали понятие «лежать между», которое относим к основным понятиям геометрии. Свойство этого понятия выражено в следующей аксиоме.

4. Из трёх точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Подчеркнём, что, говоря «точка B лежит между точками A и C», мы имеем в виду, что A, B, C — различные точки прямой и точка B лежит также между C и A. Иногда вместо этих слов мы говорим, что точки A и B лежат по одну сторону от точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A) или точки A и C лежат по разные стороны от точки B.

[1] Такие понятия, как «принадлежать», «множество», «число» и т. п., относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики. Поэтому мы считаем их известными и не относим к числу основных понятий планиметрии.

5. Каждая точка O прямой разделяет её на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.

При этом точка O не принадлежит ни одному из указанных лучей.

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между A и B. Коротко можно сказать так: отрезок — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a (в некоторой точке C, лежащей между A и B), то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

6. Каждая прямая a разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.

Прямая a называется границей каждой из указанных полуплоскостей; её точки не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.

Следующие аксиомы связаны с понятием наложения и равенства фигур. Понятие наложения относится в нашем курсе к основным понятиям геометрии. В главе I мы определили равенство геометрических фигур, используя понятие наложение. Мы опирались на наглядные представления о наложении фигур и допускали, что всякая геометрическая фигура может перемещаться как единое целое, наподобие того как перемещаются материальные тела. Но геометрические фигуры — не материальные тела, а воображаемые объекты, поэтому наложения геометрических фигур следует понимать в особом смысле.

Чтобы выяснить этот смысл, заметим, что при наложении фигуры $Ф$ на равную ей фигуру $Ф_1$, как мы представляем его наглядно, каждая точка фигуры $Ф$ накладывается на некоторую точку фигуры $Ф_1$. Иначе говоря, каждая точка фигуры $Ф$ сопоставляется некоторой точке фигуры $Ф_1$. Но мы можем сопоставить каждую точку фигуры $Ф$ некоторой точке фигуры $Ф_1$ и без непосредственного наложения $Ф$ на $Ф_1$ (рис. 374). Такое сопоставление называется отображением фигуры $Ф$ на фигуру $Ф_1$ (при этом подразумевается, что каждая точка фигуры $Ф_1$ оказывается сопоставленной не-

Рис. 374

некоторой точки фигуры $Ф_1$). Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем отображение Ф на $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается в определённую точку плоскости, т. е. **наложение — это отображение плоскости на себя.**

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. ниже аксиомы 7—13). Чтобы сформулировать эти аксиомы, введём понятие равенства фигур. Пусть Ф и $Ф_1$ — две фигуры. **Если существует наложение, при котором фигура Ф отображается на фигуру $Ф_1$, то мы говорим, что фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$, или фигура Ф равна фигуре $Ф_1$.** Сформулируем теперь аксиомы о свойствах наложений.

7. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

8. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Это означает, что если даны какой-то отрезок AB и какой-то луч h с началом в точке O, то на луче h существует, и притом только одна, точка C, такая, что отрезок AB равен отрезку OC.

9. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Это означает, что если даны какой-то луч OA и какой-то неразвёрнутый угол CDE, то в каждой из двух полуплоскостей с границей OA существует, и притом только один, луч OB, такой, что угол CDE равен углу AOB.

10. Любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами: 1) так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1; 2) так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.

11. Любая фигура равна самой себе.

12. Если фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре Ф.

13. Если фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$, а фигура $Ф_2$ равна фигуре $Ф_3$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_3$.

Как видно, все приведённые аксиомы соответствуют нашим наглядным представлениям о наложении и равенстве фигур и поэтому не вызывают сомнений.

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки.

Пусть AB — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче AB отложим отрезок $AA_1 = PQ$, на луче A_1B — отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка A_n не совпадёт с точкой B либо точка B не окажется лежащей между A_n и A_{n+1}. В первом случае говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближённо выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то её также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы предполагаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так:

14. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Кроме того, мы принимаем аксиому существования отрезка данной длины.

15. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Систему аксиом планиметрии завершает аксиома параллельных прямых.

16. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Отметим, что для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Например, вместо аксиомы параллельных прямых можно принять в качестве аксиомы утверждение о том, что сумма углов треугольника равна $180°$. Тогда утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» можно доказать как теорему (попробуйте провести такое доказательство самостоятельно). От различных систем аксиом требуется лишь, чтобы они были эквивалентны, т. е. приводили бы к одним и тем же выводам.

Иногда стремятся к тому, чтобы аксиомы были независимыми, т. е. ни одну из них нельзя было вывести из остальных. Мы не ставили перед собой такой цели. Например, утверждение аксиомы 5 может быть доказано на основе остальных аксиом, т. е. фактически это утверждение является теоремой, а не аксиомой. Однако для упрощения изложения мы приняли его в качестве аксиомы.

В заключение рассмотрим одну из самых первых теорем нашего курса — теорему, выражающую первый признак равенства треугольников (п. 15). Её доказательство опиралось на наглядные представления о наложении и равенстве фигур, понятие аксиомы тогда ещё не было введено. Напомним это доказательство и рассмотрим его с точки зрения принятых нами аксиом.

Нужно было доказать, что если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. С этой целью мы рассматривали такое наложение, при котором вершина A совмещается с вершиной A_1, а стороны AB и AC треугольника ABC накладываются соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. При этом мы опирались на наглядно очевидный факт, что такое наложение существует, поскольку углы A и A_1 равны. Теперь можно сказать, что существование такого наложения следует из аксиомы 10.

Далее мы рассуждали так: поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1, в частности совместятся точки B и B_1, C и C_1. Как обосновать этот факт, опираясь на аксиомы? Очень просто.

По аксиоме 8 на луче A_1B_1 от точки A_1 можно отложить только один отрезок, равный отрезку AB. Но по условию теоремы $AB = A_1B_1$, поэтому при нашем наложении точка B совместится с точкой B_1. Аналогично точка C совместится с точкой C_1. Остаётся сослаться на аксиому 7, чтобы обосновать тот факт, что сторона BC совместится со стороной B_1C_1. Теперь можно сделать вывод, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся и, значит, они равны.

Как видим, само доказательство теоремы о первом признаке равенства треугольников, по существу, не изменилось, только теперь мы опираемся уже не на наглядно очевидные факты, а на аксиомы, в которых эти факты выражены.

2 Некоторые сведения о развитии геометрии

Первое сочинение, содержащее простейшие геометрические сведения, дошло до нас из Древнего Египта. Оно относится к XVII в. до н. э. В нём содержатся правила вычисления площадей и объёмов некоторых фигур и тел. Эти правила были получены практическим путём, без какого-либо логического доказательства их справедливости.

Становление геометрии как математической науки произошло позднее и связано с именами греческих учёных Фалеса (ок. 625—547 гг. до н. э.), Пифагора (ок. 580—500 гг. до н. э.), Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.), Евклида (III в. до н. э.) и др.

В знаменитом сочинении Евклида «Начала» были систематизированы основные известные в то время геометрические сведания. Главное же — в «Началах» был развит аксиоматический подход к построению геометрии, который состоит в том, что сначала формулируются основные положения (аксиомы), а затем на их основе посредством рассуждений доказываются другие утверждения (теоремы)[1].

Полученные результаты используются как на практике, так и в дальнейших научных исследованиях. Некоторые из аксиом, предложенных Евклидом, и сейчас используются в курсах геометрии. Часть из них в современной формулировке имеется в нашем курсе. Например: «Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна».

Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.), Аполлоний (III в. до н. э.) и другие древнегреческие учёные.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался лишь много веков спустя — в XVII в. н. э. — и был связан с накопленными к этому времени достижениями алгебры. Выдающийся французский математик и философ Р. Декарт (1596—1650) предложил новый подход к решению геометрических задач. В своей «Геометрии» (1637) он ввёл метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

В развитии геометрии важную роль сыграла аксиома, которая в «Началах» Евклида называлась пятым постулатом. Формулировка пятого постулата у Евклида весьма сложна[2]. Поэтому обычно его заменяют эквивалентной ему аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Многие века усилия большого числа учёных были направлены на доказательство пятого постулата. Это объяснялось тем, что число аксиом стремились свести к минимуму. Учёные думали, что пятый постулат можно доказать как теорему, опираясь на остальные аксиомы.

В конце XVIII в. у некоторых геометров возникла мысль о невозможности доказать пятый постулат. Решение этого вопроса было найдено великим русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856).

---

[1] На важность такого подхода впервые указал древнегреческий учёный Аристотель (ок. 384—322 гг. до н. э.).

[2] Пятый постулат: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

Вся творческая жизнь нашего выдающегося соотечественника была связана с Казанским университетом, где он учился, затем был профессором, а с 1827 г. — ректором университета. Его очень рано заинтересовала геометрия, и он, как и многие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида. Лобачевский предпринял попытку доказать пятый постулат от противного: он предположил, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести несколько прямых, не пересекающих данную. Исходя из этого, он пытался получить утверждение, которое противоречило бы аксиомам или полученным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что предположение неверно, а верно противоположное утверждение: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данную. Тем самым пятый постулат Евклида был бы доказан.

Но Лобачевский не получил противоречивых утверждений. На основании этого им был сделан замечательный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. Такая геометрия им была построена. Её называют теперь геометрией Лобачевского. Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Лобачевским в 1826 г.

К аналогичным выводам пришёл венгерский математик Я. Больяи (1802—1860), но он свои результаты опубликовал несколько позже, в 1832 г. В рукописях великого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855) высказывались идеи, близкие к идеям Лобачевского и Больяи. Однако он, опасаясь критики, не решился их обнародовать.

Открытие нашим великим соотечественником новой геометрии оказало огромное влияние на развитие науки. Геометрия Лобачевского широко используется в естествознании. Неизмеримо влияние новой геометрии на развитие самой геометрии. Наиболее ярко оно выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о пространстве: ведь до Лобачевского казалось, что геометрией окружающего нас пространства может быть только евклидова геометрия. Но так как возможны другие геометрии, то истинность той или иной геометрии может быть проверена лишь опытным путём. Современной наукой установлено, что евклидова геометрия лишь приближённо, хотя и с весьма большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах она имеет заметные отличия от геометрии реального пространства.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к ряду замечательных открытий в геометрии. Так, выдающимся немецким математиком Б. Риманом (1826—1866) была создана новая геометрия, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского.

Читатель вправе спросить: а являются ли геометрия Евклида и геометрия Лобачевского непротиворечивыми? Не может ли так случиться, что при дальнейшем развитии как той, так и другой геометрии получатся противоречивые выводы? Уже в конце XIX века было доказано, что если непротиворечива геометрия Евклида, то непротиворечива и геометрия Лобачевского. Непротиворечивость той или иной геометрии доказывается с помощью какой-либо интерпретации (модели) её основных понятий и аксиом. Например, одной из известных интерпретаций евклидовой геометрии является арифметическая модель, в которой точка есть пара чисел $(x; y)$, заданная в определённом порядке, а прямая есть множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению $ax + by + c = 0$, где a и b — некоторые числа ($a^2 + b^2 \neq 0$). С помощью этой модели вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии сводится к вопросу о непротиворечивости арифметики, имеющей дело с вещественными числами. О моделях, реализующих систему аксиом геометрии Лобачевского, можно прочитать в различных книгах, например в книге В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, С. А. Шестакова, И. И. Юдиной «Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики» (М.: Физматлит, 2005).

Вопрос о непротиворечивости той или иной системы аксиом связан с важными проблемами непротиворечивости, полноты и независимости систем аксиом, определяющих ту или иную геометрию. Перечисленные проблемы относятся к предмету, называемому «Основания геометрии». Крупнейший вклад в решение этих проблем внёс великий немецкий математик Д. Гильберт (1862—1943).

Отметим, что в настоящее время геометрия широко используется в самых разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д. Неоценимо её значение в прикладных науках: в машиностроении, геодезии, картографии. Методы геометрии широко применяются практически во всех разделах науки и техники и, конечно же, в самой математике.

Ответы и указания

Глава I

3. Три точки или одна точка. 4. Четыре прямые. 6. Три отрезка. 16. Четыре угла. 17. h и l. 18. $OB<OA$; $OC>OA$; $OB<OC$. 19. а) Да; б) нет. 21. $\angle AOC<\angle AOB$. 22. а) Да; б) нет. 29. Две точки. 30. 10,3 см. 31. а) 8,5 см; б) 36 мм. 32. 25,5 см или 1,5 см. 33. 9 см или 23 см. 34. $BO=47$ см, $DA=17$ см. 35. 480 мм. 37. а) $AC=1$ см, $CB=1$ см, $AO=0,5$ см, $OB=1,5$ см; б) $AB=6,4$ м, $AC=3,2$ м, $AO=1,6$ м, $OB=4,8$ м. 38. а) 10,5 см; б) 1,5 см. 39. $\frac{a}{2}$. 40. 4 см. 44. Нет. Построение выполнимо, когда $\angle AOB$ острый или прямой. 46. Да. 47. а) 131°; б) 121°2'. 48. 45°. 49. 88°. 50. 51°. 51. 60°. 52. 160°. 53. Нет. 58. а) 68°; б) 90°; в) 165°. 59. Прямой. 60. Да. 61. а) 70° и 110°; б) 150° и 30°; в) 111°39' и 68°21'; г) 135° и 45°; д) 100° и 80°. 62. 106°. 63. Да. 64. а) $\angle 1=\angle 3=63°$, $\angle 4=117°$; б) $\angle 1=43°27'$, $\angle 2=\angle 4=136°33'$. 65. а) 62°, 62°, 128°, 128°; б) 40°, 40°, 140°, 140°. 66. а) $\angle 2=\angle 4=110°$, $\angle 1=\angle 3=70°$; б) $\angle 1=\angle 3=45°$, $\angle 2=\angle 4=135°$; в) $\angle 1=\angle 3=75°$, $\angle 2=\angle 4=105°$. 67. 180°. 68. $\angle AOC=120°$, $\angle BOD=130°$, $\angle COE=110°$, $\angle COD=60°$. 69. Нет. 71. Шесть прямых. 72. Шесть точек. 73. Двенадцать углов. 74. а) 8 см; б) 10 см. 75. 16 см или 4 см. 76. а) $\frac{7}{8}a$; б) $\frac{5}{8}a$. 77. а) $\frac{3}{5}a$; б) $\frac{4}{5}a$. 78. 12 см. 79. Указание. Рассмотреть два возможных случая: точки B и C лежат по разные стороны или по одну сторону от точки A. 80. 35° или 15°. 81. 30° или 90°. 82. а) 67°30' и 112°30'; б) 72°30' и 107°30'. 83. 90°. 85. Указание. Доказать, что угол ABD развёрнутый. 86. Указание. Предположить, что прямые m и n совпадают, и воспользоваться утверждением п. 12.

Глава II

90. 75 см. 91. 12,7 см и 17,3 см. 92. Нет. 93. б) 42°, 47°. 94. б) $BD=5$ см, $AB=15$ см. 95. б) $AB=14$ см, $BC=17$ см. 96. б) 110°. 105. б) 46°. 106. б) 90°. 107. 10 см, 20 см и 20 см. 108. $AB=12,5$ см и $BC=16$ см. 109. 8 см. 112. 50°. 113. б) 37°30'. 118. $\angle A=\angle B=\angle C$. 119. $EF=8$ см, $\angle DEK=86°$, $\angle EFD=50°$. 121. б) $BC=15$ см, $CO=13$ см. 122. б) $AB=11$ см, $BC=19$ см. 130. 18 см. 136. 25°. 142. Указание. Рассмотреть два случая. Точка B лежит: а) на луче AO; б) на продолжении луча AO. 145. 90°. 146. 28 см. 149. Нет. 150. Нет. 152. Указание. Сначала построить биссектрису угла AOB. 155. Указание. Сначала построить прямой угол. 156. $AB=4$ см, $AC=5$ см, $BC=6$ см. 157. 7 см, 6 см и 6 см. 163. 10 см или 6 см. 164. б) Указание. Пусть M — точка, равноудалённая от точек A и B и не лежащая на прямой AB. Воспользоваться утверждением: медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой. 165. б) Указание. Сначала доказать, что $\angle AOK=\angle BOK$. 166. Указание. Воспользоваться задачей 145. 167. Указание. Сначала доказать равенство треугольников DBF, FCE и EAD. 168. 40°. 169. Указание. Доказать, что $\triangle ABO=\triangle FEO$. 170. Указание. Сначала доказать

равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$. 171. Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABC и ADC. 172. Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABC и ABD. 173. Указание. Пусть угол BAD — смежный с углом A треугольника ABC. Для доказательства неравенства $\angle BAD > \angle B$ отметить середину O стороны AB и на продолжении отрезка CO отложить отрезок OE, равный CO. Затем доказать, что угол BAE равен углу B треугольника ABC и воспользоваться неравенством $\angle BAD > \angle BAE$. 174. Указание. Наложить треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона BC совместилась со стороной B_1C_1, а сторона BA наложилась на луч B_1A_1. Для доказательства того, что точка A совместится с точкой A_1, воспользоваться задачей 173. 175. Указание. Сначала доказать, что $\triangle AOD = \triangle BOC$, а затем, что $\triangle EBD = \triangle EAC$. 176. Указание. Рассмотреть треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, где точки D и D_1 такие, что M и M_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. 178. Указание. Пусть точка D лежит на отрезке AC. Предположить, что $AD = BD = CD$. Используя свойство углов при основании равнобедренного треугольника, сначала доказать, что $\angle ABD = \angle CBD = 90°$. 179. Указание. Сначала доказать, что $BP = CQ$. 184. Указание. Воспользоваться задачей 180.

Глава III

196. Одна прямая. 197. Три или четыре. 198. Да. 201. 100°, 100°. 202. $a \parallel c$. 204. б) Четыре угла по 60°, четыре других угла по 120°. 205. 92°. 206. а) Да; б) да. 207. а) Нет; б) да. 208. 115° и 65°. 209. $\angle 1 = 150°$, $\angle 2 = 40°$, $\angle 3 = 150°$. 210. Указание. Рассмотреть продолжение луча CE_1. 215. 58°. Указание. Сначала доказать, что $a \parallel b$. 216. 46°, 66°, 68°. 218. Да. 219. Указание. Доказать методом от противного. 220. Указание. Доказать методом от противного. 221. Указание. Сначала доказать, что $AM \parallel BC$ и $AN \parallel BC$.

Глава IV

223. а) 65°; б) 20°; в) $180° - 2\alpha$; г) 90°. 224. $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. 227. а) 36°, 72° и 72°; б) 45°, 45° и 90°. 228. а) 40°, 40° и 100° или 40°, 70° и 70°; б) 60°, 60° и 60°; в) 100°, 40° и 40°. 229. 100°. 230. 108°. 231. Указание. Воспользоваться свойством углов при основании равнобедренного треугольника. 232. Да. 233. Указание. Учесть, что внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, в два раза больше угла при основании. 234. 67°30′, 67°30′, 45° или 50°, 65°, 65°. 235. 73°20′, 73°20′ и 33°20′. 248. а) Нет; б) нет. 249. Сторона, равная 10 см. 250. а) 7 см; б) 8 см; в) 10 см. 252. 39 см и 29 см. 253. 7 см, 7 см и 11 см. 254. 45°, 45° и 90°. 255. 27°. 256. 17,8 см. 257. $AC = 6$ см, $AB = 12$ см. 258. 9 см. 259. 15 см. 260. 30°, 30° и 120°. 261. Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 35. 262. Указание. Воспользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников. 263. 70°, 70° и 40°. 264. 122°. 266. 90°, 30° и 60°. 267. Указание. Сначала доказать, что углы, прилежащие к равным сторонам данных треугольников, равны. 268. Указание. Воспользоваться задачей 265.

270. Указание. Сначала провести биссектрису угла и воспользоваться задачей 133. 271. 5 см. 272. 12 см. 273. 14 см. 276. Указание. Сначала доказать, что CM — медиана треугольника ABC. 277. 2 см или 8 см. 278. 3 см. 279. Указание. Через одну из точек, удовлетворяющих условию задачи, провести прямую, параллельную данной, и доказать, что любая другая точка, удовлетворяющая условию задачи, лежит на этой прямой. 280. Луч с началом на стороне BA, параллельный стороне BC. Указание. Воспользоваться задачей 279. 281. Прямая, параллельная данным прямым и находящаяся на равных расстояниях от них. 282. Указание. Воспользоваться задачей 281. 283. Две прямые, параллельные данной прямой и расположенные на данном расстоянии по разные стороны от нее. 285. Указание. Воспользоваться задачей 284. 299. 20°. 300. Указание. Доказательство провести методом от противного. 302. Указание. а) Допустить, что $HM_1 \geq HM_2$, и воспользоваться задачей 301; б) допустить, что $HM_1 > HM_2$ или $HM_1 = HM_2$, и воспользоваться задачей 301. 303. Указание. Продолжить медиану AM за точку M на отрезок MD, равный AM, и рассмотреть треугольник ABD. 304. Указание. Пусть N — точка пересечения прямой BM и отрезка AC. Применить теорему о неравенстве треугольника к треугольникам ABN и MNC. 305. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. 306. Указание. Доказать методом от противного. 308. 16,5 см. 311. Две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых. 312. Указание. Пусть в треугольнике ABC $AC > AB$, а AM — данный отрезок. Учесть, что в треугольнике ACM $\angle C < \angle M$. 313. Указание. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, BM — его данная медиана. Сначала построить $\triangle BB_1C$, в котором точка M — середина стороны BB_1. 314. б) Указание. Построить угол, равный данному, а затем воспользоваться задачей 284. 315. а) Указание. Воспользоваться свойством 2 п. 33 и задачей 314, а. 316. Указание. Воспользоваться задачей 282. 317. Указание. Воспользоваться задачей 245. 318. Указание. На сторонах BC и AB построить точки A_1 и C_1 так, чтобы $BA_1 = AC_1 = CB_1$. 319. Указание. Если данные отрезки не равны друг другу, то сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной биссектрисе, а катет — данной высоте. 320. Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной медиане, а катет — данной высоте. 321. Указание. Сначала построить биссектрису угла C.

Задачи повышенной трудности

322. $ab = 1$. 323. $\frac{5}{n}$. 324. Указание. Воспользоваться свойством смежных углов: $\angle 4 + \angle 1 = 180°$. 325. 150°. 326. Указание. Пусть три из данных прямых проходят через точку A. Используя метод от противного, доказать, что каждая из оставшихся трёх прямых проходит через эту точку. 327. Указание. Пусть три из данных точек лежат на прямой a. Используя метод от противного, доказать, что каждая из оставшихся четырёх точек лежит на прямой a. 328. Указание. Сначала доказать, что

$\triangle ABC_1 = \triangle BOC_2$, где O — середина отрезка AB. 329. Указание. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Продолжить стороны AB и A_1B_1 на отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C_1$ и рассмотреть треугольники ADC и $A_1D_1C_1$. 330. Могут. Например, равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и треугольник ABD, где D — такая точка на стороне BC, что $AB = AD$. 331. Могут. Рассмотрим, например, равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и отметим какую-нибудь точку D на продолжении стороны AB. Тогда треугольники ADC и DBC обладают указанным свойством, но не являются равными. 332. Указание. Воспользоваться задачей 174. 333. $90° - \frac{\alpha}{2}$. 335. а) Остроугольный; б) остроугольный. 336. Указание. Воспользоваться соотношениями между сторонами и углами треугольника и теоремой о сумме углов треугольника. 337. 70°. Указание. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла A и прямой BM. Сначала доказать равенство треугольников AOC и MOC. 338. Указание. Соединить один из концов отрезка с вершиной треугольника и воспользоваться задачей 312. 339. Указание. Воспользоваться задачей 173, а также соотношениями между сторонами и углами треугольника. 340. Указание. Продолжить отрезок AD до пересечения с BC и воспользоваться задачей 312. 341. Указание. Отметить на стороне AB такую точку C_1, что $AC_1 = AC$, и рассмотреть треугольник BC_1D. 342. Указание. Доказать методом от противного. 343. Указание. Пусть ABC — данный треугольник, $AB > BC$, BM — медиана. Отметить такую точку E, что M является серединой отрезка BE, и рассмотреть треугольник ABE. 344. Указание. Воспользоваться задачей 173. 345. Указание. Продолжить отрезок BA на отрезок $AD = AC$ и, рассмотрев $\triangle DHB$, воспользоваться неравенством треугольника. 346. Указание. Воспользоваться задачей 341. 347. Указание. Воспользоваться задачами 343 и 346. 349. Указание. Пусть в треугольнике ABC медиана AM и высота AH делят угол A на три равных угла BAH, HAM и MAC. Провести перпендикуляр MD к стороне AC и доказать сначала, что $MD = \frac{1}{2}MC$. 350. Указание. Учесть, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. 352. Нет. Указание. Воспользоваться задачей 160. 353. Два, одно или ни одного. Указание. Воспользоваться задачей 160. 354. Задача имеет одно решение, если данные точки не лежат на одной прямой, и не имеет решения, если эти точки лежат на одной прямой. Указание. Воспользоваться задачей 160. 355. Указание. Сначала построить такую точку A_1, что прямая a проходит через середину отрезка AA_1 перпендикулярно к нему, а затем провести отрезок A_1B. 357. Четыре, три, два, одно или ни одного. Указание. Воспользоваться задачей 311. 358. Четыре. Указание. Воспользоваться задачей 311. 359. Указание. Сначала построить треугольник OAD, в котором $AD = R$ и $OD = 2R$, где R — радиус данной окружности. 360. Указание. Пусть даны острый угол A, высота BH искомого треугольника ABC и отрезок PQ, равный его периметру. Построить сначала $\triangle ABH$, а затем такую точку D на луче AH, что $AD + AB = PQ$. 361. Указание. Построить сначала треугольник, у которого сторона равна данному периметру, а углы, прилежащие к ней, равны половинам данных углов. 362. У к а з а н и е. Пусть BC, $AC+AB$, $\angle B-\angle C$ — данные элементы искомого треугольника ABC. На продолжении стороны CA за точку A отложить отрезок AA_1, равный отрезку AB. Построить сначала $\triangle CBA_1$.

Глава V

364. а) 540°; б) 720°; в) 1440°. 365. а) Четыре; б) три; в) шесть; г) пять. 366. 23 мм, 20 мм, 19 мм, 18 мм. 367. 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. 368. 90°. 369. 70°. 370. 30°, 60°, 120°, 150°. 372. а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см. 373. 13 см, 12 см, 13 см, 12 см. 374. 78 см. 375. 56 см или 70 см. 376. а) $\angle B=\angle D=96°$, $\angle C=84°$; б) $\angle A=\angle C=117°30'$, $\angle B=\angle D=62°30'$; в) $\angle A=\angle C=71°$, $\angle B=\angle D=109°$; г) $\angle A=\angle C=120°$, $\angle B=\angle D=60°$; д) $\angle A=\angle C=53°$, $\angle B=\angle D=127°$. 377. $MN=PQ=6$ см, $NP=QM=3$ см, $\angle M=\angle P=60°$, $\angle N=\angle Q=120°$. 378. У к а з а н и е. Сначала доказать, что $BK=DM$. 380. У к а з а н и е. Воспользоваться признаком 3°, п. 44. 382. У к а з а н и е. Воспользоваться признаком 3°, п. 44. 383. У к а з а н и е. Воспользоваться признаком 2°, п. 44. 386. У к а з а н и е. Через середину боковой стороны провести прямую, параллельную основаниям, и воспользоваться задачей 385. 387. $\angle B=144°$, $\angle D=68°$. 388. У к а з а н и е. а) Через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне. 389. У к а з а н и е. а) Воспользоваться указанием к задаче 388, а; б) через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную диагонали. 390. 68°, 112°, 112°. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 388, а. 391. У к а з а н и е. Приложить плитки друг к другу так, чтобы боковые стороны совпали, меньшее основание одной плитки лежало на одной прямой с бо́льшим основанием другой плитки. 393. а) 6 см; б) 5 см. 394. Три. 395. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 384. 401. а) 108,5 см или 122,5 см; б) 23,4 дм или 19,8 дм. 403. 10 см. 404. У к а з а н и е. Пусть BM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе AC. Рассмотреть четырёхугольник $ABCD$, где D — точка, симметричная точке B относительно точки M. 405. а) 30° и 150°; б) 30° и 60°. 406. 43 см. 407. 22°30′ и 67°30′. 410. а) Нет; б) нет; в) да. 412. 24 см. 417. а) Да; б) бесконечное множество: любая прямая, перпендикулярная к данной, а также сама прямая; в) одну. 418. А, Е, О. 422. а) Да; б) нет; в) да; г) да. 423. О и Х. 425. Переместить сторону CD; 9 см и 5 см. 426. 8 см, 4 см, 8 см. 428. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 400. 429. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой о сумме углов выпуклого четырёхугольника и задачей 428. 431. У к а з а н и е. Через точку M провести прямую, параллельную BK, и воспользоваться задачей 385. 432. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 385. 433. У к а з а н и е. Сначала доказать, что $\triangle BKD=\triangle BMD$. 435. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 384. 436. 36,8 см. У к а з а н и е. Использовать диагональ BD. 437. У к а з а н и е. Сначала доказать, что $\triangle ABF=\triangle AMK$. 438. 8 см. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 389, а. 439. У к а з а н и е. Через середину меньшего основания провести прямые, параллельные боковым сторонам, и воспользоваться задачей 404. 440. У к а з а н и е. Пусть EF — отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из вершины A треугольника

ABC. Рассмотреть точку D, симметричную точке A относительно середины стороны BC, и доказать, что $\triangle ABD = \triangle EAF$. **441.** Указание. Воспользоваться задачей 420. **443.** Бесконечно много. **444.** Указание. Пусть a и b — взаимно перпендикулярные оси симметрии фигуры и O — точка их пересечения. Сначала доказать, что если точки M и M_1 симметричны относительно прямой a, а M_1 и M_2 симметричны относительно прямой b, то M и M_2 симметричны относительно точки O.

Глава VI

447. Указание. Пусть O — точка пересечения отрезков AM и BC. Сначала доказать равенство треугольников ABO и MCO. **448.** Указание. Провести перпендикуляр EF к прямой BC и сначала доказать равенство треугольников ABM и EFM, DCN и EFN. **449.** а) 1,44 см²; б) $\frac{9}{16}$ дм²; в) 18 м². **450.** а) 4 см; б) 1,5 дм; в) $2\sqrt{2}$ м. **451.** а) 2400 мм²; б) 0,24 дм². **452.** а) 27,2 см²; б) $6\sqrt{2}$ см²; в) 21,4 см; г) 2,7 см. **453.** а) Увеличится в два раза; б) увеличится в четыре раза; в) не изменится. **454.** а) 25 см и 10 см; б) каждая сторона равна 9 м. **455.** 2200. **456.** 800. **457.** 12 м. **458.** Площадь участка квадратной формы больше на 900 м². **459.** а) 180 см²; б) 4 см; в) 36 см; г) 9. **460.** 156 см². **461.** 54 см². **462.** 18 см². **463.** 86,7 см². **464.** а) 10 см; б) 4 см; в) 12 см и 9 см. **465.** 12 см². **466.** 115,52 см². **467.** Площадь квадрата больше. **468.** а) 88,5 см²; б) $6\sqrt{3}$ см²; в) 5,4 см; г) $4\sqrt{2}$ см. **469.** 5 см. **470.** 0,825 см. **471.** а) 22 см²; б) 1,8 дм². **472.** 14 см и 24 см. **473.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 38. **474.** Площади треугольников равны. **475.** Указание. Сначала разделить сторону BC на три равные части. **476.** а) 224 см²; б) 4,6 дм². Указание. Учесть, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны. **477.** 6 см и 9 см. **479.** а) 2 см²; б) 5,4 см. Указание. Воспользоваться второй теоремой п. 53. **480.** а) 288 см²; б) 24 см²; в) 72 см². **481.** 54 см². **482.** 4,76 см². **483.** а) 10; б) $\sqrt{61}$; в) $\frac{5}{2}$; г) 10. **484.** а) 5; б) $4\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{3}$; г) 8; д) 2. **485.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **486.** а) 13; б) 5; в) 8. **487.** 15 см. **488.** а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см. **489.** а) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см²; б) $0,25\sqrt{3}$ см²; в) $2\sqrt{3}$ дм². **490.** а) 10 см и 48 см²; б) $6\sqrt{3}$ см и $27\sqrt{3}$ см²; в) $7\sqrt{2}$ см и 49 см². **491.** а) $4\frac{8}{13}$; б) 3,6. **492.** 8 см, 9,6 см, 9,6 см. **493.** 13 см и 120 см². **494.** 36 см² и 16 см. **495.** а) 150 см²; б) $45\sqrt{3}$ см²; в) 126 см². **496.** $\sqrt{7}$. **497.** 8 см. **498.** а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) да. **499.** а) 4,12 см; б) $7\frac{1}{17}$ см. **501.** а) 270 000 м²; б) 0,27 км². **502.** $46\frac{2}{3}$ см². **503.** 20 см. **504.** 300 см². **505.** Указание. Воспользоваться тем, что перпендикуляр меньше наклонной. **506.** На сторонах BC и DC квадрата $ABCD$ нужно взять точки M и N так, чтобы $BM = \frac{2}{3}BC$, $DN = \frac{2}{3}DC$, и провести прямые AM и AN. 507. Нет. Указание. Сравнить, например, площади треугольников со сторонами 13, 13, 24 и 13, 13, 10. 508. Указание. Соединить точку на основании с вершиной, противолежащей основанию, и воспользоваться тем, что сумма площадей двух получившихся треугольников равна площади данного треугольника. 509. Указание. Задача решается аналогично задаче 508. 510. Указание. Доказать, что площадь каждого треугольника равна половине площади параллелограмма $AECF$. 511. а) и б) Площади треугольников равны. в) Указание. Воспользоваться задачей б) и второй теоремой п. 53. 512. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 513. 60 м, 14,4 м. 514. $10\frac{10}{17}$ см. 515. а) $100\sqrt{3}$ см²; б) 16 см². 516. 320 см². 517. 84 см². Указание. Доказать, что $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ — прямоугольные треугольники. 518. а) 243 см²; б) 529 см². 519. b^2. 520. a^2. 522. 48 см². 523. $(\sqrt{2}-1)a^2$. 524. 20 см². 525. $\frac{20}{7}$ см. 526. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ см². 527. 48 см². 528. 30 см². 529. 60 см². 530. $54\sqrt{3}$ см². 531. 19,14 см². 532. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора.

Глава VII

533. $\frac{3}{4}$; нет. 534. а) Да; б) да; в) нет. 535. а) 15 см; б) $10\frac{2}{3}$. 537. $BD = 8$ см, $DC = 12$ см. 538. $AB = 18$ см, $AC = 6$ см. 539. $NE = 5,6$ см, $EK = 2,4$ см. 540. $CD = 14$ см, $DE = 21$ см. 541. Да. 542. 8,4 см, 10,5 см, 14,7 см. 544. 4,5 м. 546. 175 см² и 252 см². 547. 57,5 дм². 548. 2:5. 549. 6 см, 9 см, 12 см. 550. $x = 9$, $y = 21$. 551. а) $EF = 6$ см, $FC = 3,5$ см; б) $DE = 4\frac{5}{7}$ см, $BC = 8\frac{2}{7}$ см. 552. а) 10 см; б) $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$; в) 12 см. 553. а) Не всегда; б) да; в) да. 554. 6 см и 4,5 см. 556. а) 5 см, 5 см, 7,5 см, 7,5 см; б) все четыре стороны равны $\frac{ab}{a+b}$. 557. а) 17,5 см; б) $BD = 5$ см, $DE = 6$ см; в) 8 см. 558. Указание. Если прямые a и b не параллельны, то через точку A провести прямую, параллельную прямой b. 559. Да. 560. а) Да; б) да. 562. $\frac{ab}{a+b}$. Указание. Воспользоваться задачей 552. 563. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$. Указание. Через точку D провести прямую, параллельную BK. 564. 10 см. 565. 5 см. 566. 42 см. 567. Указание. Провести диагональ данного четырёхугольника. 568. Указание. Воспользоваться задачей 567. 569. Указание. Сначала доказать, что середины боковых сторон трапеции лежат на прямой, проходящей через середины диагоналей. 570. 6 см и 18 см. 571. 35. 572. а) $h = 20$, $a = 4\sqrt{41}$, $b = 5\sqrt{41}$; б) $h = 48$, $a = 60$, $b = 80$; в) $a = 12\sqrt{3}$, $c = 24$, $a_c = 18$; г) $b = 8\sqrt{3}$, $c = 16$, $b_c = 12$;

д) $a=2\sqrt{5}$, $b=3\sqrt{5}$, $a_1=4$, $b_1=5$. 573. $a_1=\frac{a^2}{c}$, $b_1=\frac{b^2}{c}$. 574. Указание. а) Воспользоваться формулой для вычисления площади треугольника. б) Воспользоваться задачей 573. 575. 32 мм, 18 мм. 576. 61 см. 577. $1\frac{12}{13}$ см, $11\frac{1}{13}$ см. 579. 3,15 м. 580. 4,805 м. 581. 0,12 м. 582. 45 м. 583. 72,25 м. 586. Указание. Сначала построить треугольник, подобный искомому. 587. Указание. См. указание к задаче 586. 588. Указание. См. указание к задаче 586. 589. Указание. См. указание к задаче 586. 590. Указание. См. указание к задаче 586. 592. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\frac{\sqrt{15}}{15}$. 594. а) $\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$, $90^\circ-\beta$, $\frac{b}{\sin\beta}$; б) $\approx 8{,}39$ см, 40°, $\approx 13{,}05$ см. 595. а) $b\operatorname{tg}\alpha$, $90^\circ-\alpha$, $\frac{b}{\cos\alpha}$; б) ≈ 11 см, 48°, ≈ 16 см. 596. $90^\circ-\alpha$, $c\sin\alpha$, $c\cos\alpha$; 60°, ≈ 14 см, ≈ 20 см. 597. $\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$; ≈ 19, $\approx 38^\circ 39'$, $\approx 51^\circ 21'$. 598. а) $b^2\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha$. 599. $5\operatorname{tg}\alpha$ см^2. 600. ≈ 74 м. 601. 60°, 120°, 60° и 120°. 602. 60° и 30°. 603. ≈ 72 см^2. 604. $A_1B_1=4{,}5$ см, $B_1C_1=4{,}75$ см. 606. $\frac{7}{8}$. 607. 18 см, 12 см. 608. Указание. Воспользоваться задачей 535. 609. Указание. Воспользоваться задачей 535. 610. 10,5 см, 14 см, $7\frac{7}{9}$ см. 612. $x=\frac{ab}{a+b}$. 613. Указание. Сначала доказать, что: а) $\triangle ABM\sim\triangle A_1B_1M_1$; б) $\triangle ABH\sim\triangle A_1B_1H_1$. 614. $DC=3\frac{2}{3}$ см, $DB=2\sqrt{13}$ см, $CB=\frac{2}{3}\sqrt{61}$ см. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ADC\sim\triangle BAD$. 615. $\frac{2ab}{a+b}$. 619. Указание. Пусть точка B лежит между C и D. К треугольникам ABD и ACD дважды применить следствие 2 из первой теоремы п. 53. 620. Указание. Воспользоваться задачей 535. 621. $\frac{ab}{2}\sin\alpha$. 622. 60 см^2. 623. $\angle C=150^\circ$, $\angle D=30^\circ$. 625. 18 см^2. 626. Указание. Воспользоваться задачей 535. 630. Указание. Воспользоваться задачей 1 п. 64.

Глава VIII

633. OA и AC. 635. 90°. 636. 120°. 637. Указание. Сначала доказать, что $\angle ADC=30^\circ$. 638. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. 639. $12\sqrt{3}$ см. 640. 60°. 641. 60°. 642. $8\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{3}$ см; 30°, 30°. 643. 5 см. 647. а) Да; б) нет; в) да. 648. а) Указание. Сначала построить прямую, проходящую через центр окружности и пер-

перпендикулярен к данной прямой. 650. а) 16; б) $16\sqrt{2}$; в) 32. 651. 112° и 248°. 652. $16\sqrt{3}$ см. 654. а) 64°; б) 176°; в) 34°; г) 100°. 656. 60° и 30° или 140° и 110°. 660. 101° или 36°. 667. 50°. 668. 20°30′, 34°50′. 660. 36°. 661. 44°. 662. 92°. 664. Указание. Воспользоваться задачей 660. 666. а) 4; б) 12; в) 0,25. 667. $8\sqrt{2}$ см. 670. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ACP \sim \triangle AQB$. 671. а) 6 см; б) 7,5 см. 672. Указание. Воспользоваться задачей 670. 674. Указание. Сначала доказать, что треугольник AOB равнобедренный. 676. а) 10 см; б) $7\sqrt{2}$ дм. 678. а) 46° и 46°; б) 21° и 81°. 679. а) $AD = 8,5$ см, $CD = 5$ см; б) $AC = 14,6$ см. 681. 9 см. 683. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. 687. Указание. Воспользоваться теоремой п. 75. 688. Указание. Учесть, что искомая точка лежит на биссектрисе данного угла. 689. $3\frac{1}{3}$ см. 690. 60 см. 691. 20 см. 692. $AP = 1,5$ см, $PB = 5,5$ см, $BQ = 5,5$ см, $QC = 3,5$ см, $CR = 3,5$ см, $RA = 1,5$ см. 693. а) 60 см; б) 40 см. 694. $p - c$. 695. 20 см. 696. 60 см². 699. 1,2 см. 702. а) $\angle A = 67°$, $\angle B = 23°$, $\angle C = 90°$; б) $\angle A = 55°$, $\angle B = 35°$, $\angle C = 90°$. 703. $\angle A = 51°$, $\angle B = \angle C = 64°30'$ или $\angle A = 129°$, $\angle B = \angle C = 25°30'$. 704. б) d, d или, d или. 705. а) 5 см; б) 15 см. Указание. Воспользоваться задачей 704. 706. $10\sqrt{3}$ см. 707. 16 см. 709. Указание. Воспользоваться свойством углов вписанного четырёхугольника. 710. Указание. Воспользоваться задачей 659. 712. Указание. Воспользоваться задачей 664. 713. Указание. Учесть, что $BM = MK$ и $CN = NK$. 714. Указание. Пусть K — точка пересечения общей касательной, проходящей через точку M, и прямой AB. Сначала доказать, что $KA = KM = KB$. 720. Нет. 722. $\frac{3S}{4r}$, $\frac{S}{3r}$, $\frac{3S}{4r}$, $\frac{2S}{3r}$. 725. $\frac{ab}{a+b}$. 726. Указание. Использовать серединный перпендикуляр к той стороне, к которой проведена медиана. 728. Указание. Воспользоваться свойством углов вписанного четырёхугольника. 730. Указание. Воспользоваться задачей 729. 731. Указание. Воспользоваться задачей 729. 732. Указание. Сначала доказать, что около четырёхугольника $MNBC$ можно описать окружность. 733. 6 см. 734. Указание. Воспользоваться задачами 709 и 721. 735. $\frac{\sqrt{65}}{2}$. 736. Указание. Использовать серединный перпендикуляр к отрезку AB. 737. Указание. Воспользоваться задачей 291.

Глава IX

742. В случае б). 744. Скорость, сила. 745. $|\vec{a}| = 3$ см, $|\overrightarrow{BC}| = 4$ см, $|\overrightarrow{DC}| = 3$ см, $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{18,25}$ см, $|\overrightarrow{MA}| = 1,5$ см, $|\overrightarrow{CB}| = 4$ см, $|\overrightarrow{AC}| = 5$ см. 746. $|\overrightarrow{BD}| = 13$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 5\sqrt{2}$ см, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{74}$ см. 748. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. 749. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да. 751. а) Ромб; б) трапеция. 752. а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. 753. Да. 760. Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. 762. а) a; б) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{3}$;

г) $\vec o$; д) $\vec n$. 763. а) -3 и 10; б) 14 и 10; в) 14 и 10; г) -3 и 10. 764. а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AM}$. 766. $\overrightarrow{XY} = -\vec a + (-\vec b) + \vec c + \vec d$. 767. в) $-\vec b$. 768. $\overrightarrow{BM} = -\vec a$, $\overrightarrow{NC} = \vec b$, $\overrightarrow{MN} = \vec b - \vec a$, $\overrightarrow{BN} = (\vec b - \vec a) - \vec a$. 769. $\overrightarrow{BC_1} = \vec x$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec x - \vec y$, $\overrightarrow{BA} = -\vec y$, $\overrightarrow{BC} = \vec x - \vec y + \vec z$. 770. а) $\overrightarrow{AC} = \vec a - \vec b$; б) $\overrightarrow{AC} = -\vec a - \vec b$; в) $\overrightarrow{AC} = \vec a - \vec b$. 771. $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{CB} = \vec a - \vec b$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec b$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = -\vec a$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = -\vec a + \vec b$. 773. Равенство $|\vec x - \vec y| = |\vec x| + |\vec y|$ справедливо, если $\vec x \uparrow\downarrow \vec y$ или хотя бы один из векторов $\vec x$ и $\vec y$ нулевой. 774. 60°. 781. а) $4\vec n$; б) $\frac{9}{2}\vec m - \frac{3}{2}\vec n$; в) $-\frac{4}{3}\vec m - \frac{3}{5}\vec n$. 782. $\overrightarrow{BC} = \vec a - \frac{1}{2}\vec b$, $\overrightarrow{AO} = \vec a - \frac{1}{2}\vec b$. 783. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec a + \vec b$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec a - \vec b$. 784. а) $\overrightarrow{AC} = \vec x + \vec y$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec x + \vec y)$, $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}(\vec x + \vec y)$, $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec y - \vec x)$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\vec x$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\vec x - \vec y)$, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\vec x - \vec y$; б) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec x$, $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\vec x + \vec y$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec x - \vec y$, $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{6}\vec x - \frac{1}{2}\vec y$. 786. $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec a + \vec b)$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\vec a - \vec b$, $\overrightarrow{CC_1} = -\vec a + \frac{1}{2}\vec b$. 787. $-\frac{3}{4}\vec a + \frac{1}{4}\vec b$. 790. Указание. Воспользоваться задачей 785. 793. 10 см. 794. 6,5 см и 10,5 см. 795. 30 см. 796. 16 см. 798. 60°, 60°, 120°, 120°. 799. 7 см. 801. Указание. Если векторы $\vec x$ и $\vec y$ не коллинеарны, то воспользоваться правилом треугольника сложения векторов, а если они коллинеарны — задачей 800. 802. $-\vec a + \frac{2}{3}\vec b$. 803. $\overrightarrow{XY} = -\frac{3}{5}\vec a + \frac{3}{5}\vec b$, $\overrightarrow{MP} = -\vec a + \vec b$. 804. $\overrightarrow{CK} = \vec a$, $\overrightarrow{KD} = \vec b - \vec a$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec b - \frac{1}{2}\vec a$. 809. $\frac{3}{4}\vec a$. 810. Указание. Воспользоваться теоремой п. 74.

Задачи повышенной трудности

811. Указание. Продолжив через одну стороны данного шестиугольника, получить равносторонний треугольник. 812. Указание. Сначала доказать, что $a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_1$. Затем построить равносторонний треугольник, сторона которого равна $a_1 + a_2 + a_3$, и воспользоваться задачей 811. 814. Указание. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Учесть, что вершина C лежит внутри угла BAD, поэтому луч AC проходит внутри этого угла и, следовательно, пересекает отрезок BD. Аналогично рассмотреть луч BD и угол ABC. 815. Указание. Если данный четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то воспользоваться задачей 814. Если $ABCD$ — невыпуклый четырёхугольник и, например, прямая AB пересекает сторону CD в точке M, то рассмотреть два случая: A — точка отрезка MB и B — точка отрезка AM. 816. $\frac{a}{4}$. Указание. Пусть P — точка пересечения прямых BC и AB, $DO \parallel AC$ и $O \in AB$. Сначала доказать, что APC, AOD и POD — равнобедренные треугольники. 817. Указание. Сначала доказать неравенства $m_a < \frac{b+c}{2}$ и $m_a > \frac{b+c-a}{2}$, где a, b, c — стороны

треугольника, m_a — медиана, проведённая к стороне a. **818.** Указание. Сначала доказать, что диагонали данного четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам. **819.** Прямая, параллельная данной прямой. **820.** Указание. Воспользоваться задачами 358, а и 360, а. **821.** Указание. Воспользоваться задачей 425. **822.** Указание. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA данного параллелограмма $ABCD$. Сначала доказать равенство треугольников AO_1O_4, BO_1O_2, CO_3O_2, DO_3O_4. **823.** Указание. На луче AB отложить отрезок AN, равный отрезку AM, провести отрезок MN и провести медиану NS треугольника AMN. Затем доказать, что $\triangle ANS = \triangle MAD$ и $\triangle AKB = \triangle NMS$. **824.** 90°. Указание. Пусть D_1 — точка, симметричная точке D относительно точки E. Сначала доказать, что $\triangle ACD_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник. **825.** 30°. Указание. На луче AM отложить отрезок $AK = AB$ и, рассмотрев $\triangle BKC$, доказать, что точка K совпадает с точкой M. **826.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle BKP = \triangle ABC = \triangle CQT$. **827.** Указание. Сначала построить равнобедренный треугольник, основание которого равно сумме оснований трапеции, а боковые стороны равны диагоналям трапеции. **828.** а) Указание. Сначала доказать, что ось симметрии пересекает одну из сторон треугольника. **829.** Указание. Воспользоваться равенством треугольников ABC и ADC, APM и ATM, MQC и MRC. Для доказательства обратного утверждения предположить, что точка M не лежит на AC, и доказать, что тогда площади параллелограммов не равны. **830.** $\frac{S_1S_2(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_3(S_1^2-S_2S_3)}$. Указание. Воспользоваться следствием 2, п. 53. **831.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Указание. Воспользоваться второй теоремой п. 53. **832.** $\frac{1}{5}$. **833.** Указание. Пусть AB — боковая сторона, а M — середина другой боковой стороны трапеции $ABCD$. Сначала доказать, что $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. **834.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Указание. Сначала доказать, что $S_{AOB} = S_{COD} = \sqrt{S_1S_2}$. **835.** Указание. Сначала доказать, что площадь параллелограмма, стороной которого является меньшее основание трапеции, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к этому основанию и к боковым сторонам трапеции. **836.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AKD} = S_{CMB}$ и $S_{BKC} = S_{DMA}$. **837.** Указание. Сначала доказать, что $S_{ABE} = S_{EDC}$ и $S_{BEC} = S_{CDE}$. **838.** Указание. В каждом из трёх получившихся четырёхугольников провести диагонали так, чтобы никакие две диагонали не имели общего конца, и доказать, что площадь каждого из двух средних треугольников равна полусумме площадей соответствующих крайних треугольников. **839.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AMB} = S_{AMC} + S_{BMD}$. **840.** $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. Указание. Пусть AB и AD — перпендикуляры, проведённые к прямым, содержащим стороны данного угла O, а C — точка пересечения прямых AB и OD. Рассмотреть прямоугольные треугольники ADC и OBC. **841.** $2\sqrt{S_1S_2}$.

Указание. Учесть, что треугольники BKC и MCD имеют по равному углу, и воспользоваться второй теоремой п. 58. 842. Указание. Сначала доказать, что площади треугольников BTC и KTC равны. 843. $\frac{a}{2}$. Указание. Сначала доказать, что площади треугольников DCK и DCM равны, а затем доказать, что $KM \parallel DC$. 844. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. Указание. Через точку M провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника, и рассмотреть образовавшиеся прямоугольные треугольники. 845. Указание. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $BD = h$. Используя теорему Пифагора, доказать, что $MB = \sqrt{a^2+c^2-h^2}$ и $KB = \sqrt{a^2+c^2-h^2}$. 846. Указание. Провести перпендикуляры OM и ON к сторонам AC и CB и доказать, что $OM = \frac{1}{2}CB$, $ON = \frac{1}{2}AC$. Далее воспользоваться теоремой Пифагора для треугольников AOM, BON и COM. 847. б) Указание. Сначала доказать, что $DF = DE$ и $AF = BE$. Затем воспользоваться подобием треугольников AED и AFB. 848. Указание. Пусть AK — биссектриса треугольника ABC и, например, $AC > AB$. Пользуясь задачей 535, сначала доказать, что точка M лежит между точками K и C. Затем воспользоваться задачей 556. 849. Указание. Воспользоваться утверждением: отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный этому треугольнику. 850. Указание. Сначала доказать, что $\triangle MBC \sim \triangle MFK$ и $\triangle MAC \sim \triangle MEK$, где M — точка пересечения прямых CK и AB. 851. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Указание. Пусть ABC — данный треугольник, а D — точка пересечения диагоналей квадрата, построенного на гипотенузе BC. На продолжении луча CA отметить точку K так, чтобы $\angle CDK = \angle ADB$. Сначала доказать, что $\triangle ABD = \triangle KCD$. 852. Указание. Пусть BD и CE — биссектрисы треугольника ABC. Сначала доказать, что $\angle C = 2\angle B$, $\angle B = 2\angle A$, а затем доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ и $\triangle ABC \sim \triangle ACE$. 853. Указание. Пусть E и F — точки пересечения MP и MQ с OB и OA. Воспользоваться подобием треугольников OPE и OFQ, OQE и OEP для доказательства того, что треугольники OEF и OBE подобны. 854. Указание. Воспользоваться тем, что AB — медиана треугольника, подобного треугольнику BOS. 855. Указание. а) Рассматривая подобные треугольники, сначала доказать, что $AB^2 = AC \cdot AK$, $DF^2 = BC \cdot BF$ и $CD^2 = AD \cdot DB$. б) Применить теорему Пифагора к треугольникам AKD и DFB. в) Воспользоваться подобием треугольников AED и ACB. 856. а) $\angle A = 75°$, $\angle B = 135°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 90°$. б) Указание. Учесть, что треугольники ABP и DAB подобны. 857. Указание. Воспользоваться задачей 567. 858. Указание. Пусть MN — отрезок, соединяющий середины сторон AD и BC данного четырёхугольника $ABCD$. Отметить точку D_1, симметричную точке D относительно точки N, и рассмотреть $\triangle ABD_1$. 859. Указание. Воспользоваться задачей 858. 860. Указание. Воспользоваться задачей 858. 861. Указание. Воспользоваться теоремой о средней линии треугольника и задачами 404 и 520. 862. Указание. Продолжить перпендикуляры AM и AK до пересечения с прямой BC в точках D и E и сначала доказать, что MK — средняя линия треугольника DAE. **863.** Указание. Воспользоваться задачей 483. **864.** Указание. Воспользоваться задачей 591. **865.** Указание. Пусть точка N — середина AC. Доказать сначала, что треугольники MBC и MNC равны и BN — средняя линия треугольника AKC. Далее воспользоваться следствием 2, п. 53. **866.** Указание. Через концы одной из медиан треугольника ABC провести прямые, параллельные двум другим медианам, и воспользоваться тем, что образовавшийся при этом треугольник равен треугольнику KPG. **867.** $\frac{1}{5}$. **868.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников MND и MAB, MAD и MPB. **869.** Указание. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, X — искомая точка большего основания AD, а AB — данная боковая сторона. Сначала доказать, что $\frac{AX}{XD} = q$, и воспользоваться задачей 594. **870.** Решение. На продолжении луча с началом в точке A отложим отрезок AC_1, равный отрезку AC, и на луче C_1A от точки C_1 — отрезок C_1B_1, равный отрезку CB (сделайте рисунок). Убедитесь в том, что прямая, проходящая через точку C_1 и параллельная прямой BB_1, пересекает прямую AB в искомой точке D. Задача не имеет решения, если C — середина отрезка AB. **871.** Указание. Сначала построить какой-нибудь равнобедренный треугольник по данному углу. **872.** Указание. Пусть ABC — искомый треугольник, у которого даны стороны AB, AC и биссектриса AD. На прямой AD отметить точку E так, чтобы $BE \parallel AC$. Воспользовавшись подобием треугольников ADC и EDB и задачей 535, построить сначала отрезок DE, а затем треугольник ABE по трём сторонам. **873.** Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник, подобный искомому треугольнику ABC. **874.** Указание. Пусть h_a, h_b и h_c — данные высоты. Воспользоваться тем, что стороны a, b и c искомого треугольника пропорциональны отрезкам h_b, h_a и $\frac{h_a h_b}{h_c}$. **875.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция, у которой известны $\angle A$, боковая сторона AB и большее основание AD. Сначала построить $\triangle ABD$, а затем $\triangle BCD$ по углу B, стороне BD и отношению двух других сторон. **876.** Указание. Сначала выразить диагонали искомого ромба через сторону данного квадрата и данные отрезки. **877.** Указание. Использовать общую касательную к данным окружностям. **878.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BAD$. **879.** Указание. Воспользоваться задачей 718. **880.** Указание. Рассмотреть два случая: точка пересечения прямых лежит внутри круга и вне круга. В первом случае воспользоваться теоремой о произведении отрезков пересекающихся хорд. **881.** Указание. Доказать, что эти величины равны диаметру данной окружности. **882.** Указание. Из точек O_1 и O_2 провести перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC и сравнить расстояние между параллельными прямыми O_1H_1 и O_2H_2 с длиной отрезка O_1O_2. **883.** Пусть CD является диаметром, перпендикулярным к диаметру AB данной окружности. Искомое множество точек состоит из двух окружностей, построенных на отрезках OC и OD как на диаметрах. **884.** $148°$ и $107°$. Указание. Сначала доказать, что точка M лежит на окружности с центром A радиуса AB. **885.** *Указание.* Сначала доказать, что проведённые прямые, которые образуют новый треугольник, являются биссектрисами внешних углов треугольника, и воспользоваться теоремой о биссектрисе угла (п. 74). **886.** *Указание.* Для того чтобы доказать, что A' лежит на описанной окружности, сначала надо установить равенство $\angle ACB = \angle BAA'$. **887.** *Указание.* Пусть E — точка пересечения луча BO с окружностью, описанной около треугольника ABC. Воспользоваться подобием треугольников ABE и BCD. **888.** *Указание.* Сначала доказать, что OE — серединный перпендикуляр к отрезку AC. **889.** *Указание.* Пусть $XC > XA$ и $XC > XB$. Отложить на отрезке XC отрезок XD, равный отрезку XA, учесть, что $\angle AXC = 60°$, и доказать равенство треугольников AXB и ADC. **890.** *Указание.* Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник. Провести диаметр BB_1 и сначала доказать, что $AB_1 = CD$. **891.** *Указание.* Через точку пересечения указанных биссектрис провести прямую, параллельную AB, до пересечения с прямыми AD и BC в точках E и F и доказать, что $EF = DC$. **892.** *Указание.* Пусть $ABCD$ — данная трапеция, описанная около окружности радиуса r, а $AD = a$, $BC = b$ — её основания. Сначала доказать, что $r = \frac{ab}{a+b}$. **893.** *Указание.* В четырёхугольнике $ABCD$ на диагонали AC взять такую точку K, что $\angle ABK = \angle CBD$, и далее использовать подобие треугольников ABK и DBC, BCK и ABD. **894.** *Указание.* Через центр M вписанной окружности провести диаметр PQ описанной окружности и сначала доказать, что $PM \cdot MQ = 2Rr$. **895.** *Указание.* Доказать, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на окружности с центром в середине отрезка OH радиуса $\frac{R}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. **896.** *Указание.* Пусть ABC — данный треугольник, а H, K и M — основания перпендикуляров, проведённых из точки D описанной окружности к прямым AB, AC и BC. Допустим, что луч BK лежит внутри угла HDM. Сначала доказать, что $\angle AKH = \angle ADH = \angle MDC = \angle MKC$. **897.** *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, а r_1 и r_2 — их радиусы, причём $r_1 > r_2$. Построить две окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов соответственно $r_1 - r_2$, $r_1 + r_2$ и воспользоваться решением задачи 573. **898.** *Указание.* Сначала построить две окружности радиуса P_1Q_1 с центром M и радиуса OA с центром O, где A — середина какой-нибудь хорды данной окружности, равной отрезку P_1Q_1. Затем воспользоваться задачей 897. **899.** *Указание.* Сначала доказать, что наименьшей будет хорда, перпендикулярная к диаметру, проходящему через данную точку. **900.** а) *Указание.* Сначала построить какой-нибудь треугольник по данной стороне и противолежащему углу, затем описать около него окружность и воспользоваться следствием 1, п. 78. б) *Указание.* Пусть ABC — искомый треугольник, $\angle B$ — данный угол. На продолжении луча AC отложить отрезок $AA_1 = AB$, а на продолжении луча CA — отрезок $CB_1 = BC$. Пользуясь задачей 900, а, сначала построить $\triangle A_1BB_1$. **901.** *Указание.* Пусть PQR — искомый треугольник, P — вершина, из которой проведены высота, биссектриса и медиана треугольника, а O — центр описанной около треугольника окружности. Учесть, что

$DO \perp QR$. **902.** Четыре решения. Указание. Воспользоваться задачей 889. **904.** Параллелограмм. **905.** Параллелограмм. Указание. Воспользоваться задачей 1, п. 87. **906.** Указание. Учесть, что длины векторов $\frac{\vec{AB}}{|AB|}$ и $\frac{\vec{AC}}{|AC|}$ равны. **907.** Указание. Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой. Сначала доказать, что в этом случае $\vec{AB} = n\vec{AC}$, где n — некоторое число. В качестве k, l, m можно взять, например, числа $k = n - 1$, $l = 1$, $m = -n$. При доказательстве обратного утверждения взять точку O, совпадающую с точкой A. **908.** Указание. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F — середины диагоналей AC и BD, а G — точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Используя задачу 781, для произвольной точки O выразить векторы $\vec{OE}$, $\vec{OF}$ и $\vec{OG}$ через $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ и воспользоваться задачей 907. **909.** Указание. Воспользоваться задачами 819 и 907. **910.** Указание. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Пользуясь тем, что $\vec{OA} = -2\vec{OA_1}$, $\vec{OB} = -2\vec{OB_1}$ и $\vec{OC} = -2\vec{OC_1}$, доказать, что $\vec{OH} = -3\vec{OO}$.

Глава X

911. а) -4; б) 20; в) -1; г) 5. **912.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 1; д) -2; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и) число k не существует. **913.** а) Да; б) да. **914.** Указание. Доказательство провести методом от противного и воспользоваться леммой о коллинеарных векторах. **915.** $\vec{AO} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$. **916.** а) $x = -1$, $y = 3$; б) $x = 4$, $y = -5$; в) $x = 0$, $y = 8$; г) $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$. **918.** а) $\vec{a}\{2; 3\}$, б) $\vec{b}\{-5; 3\}$, $\vec{c}\{2; 0\}$; в) $\vec{d}\{-3; -4\}$, $\vec{e}\{2; -2\}$, $\vec{f}\{-4; -5\}$. **919.** а) $\vec{a}\{2; 3\}$, $\vec{b}\{-\frac{1}{2}; -2\}$, $\vec{c}\{8; 0\}$, $\vec{d}\{1; -1\}$, $\vec{e}\{0; -2\}$, $\vec{f}\{-1; 0\}$. **920.** а) $\vec{x} = -3\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}$; б) $\vec{y} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$; в) $\vec{z} = -\vec{i}$; г) $\vec{u} = 3\vec{j}$; д) $\vec{v} = \vec{j}$. **921.** а) $x = 5$, $y = -3$; б) $x = -4$, $y = 2$; в) $x = -4$, $y = 0$; г) $x = 0$, $y = 0$. **922.** а) $\{3; 7\}$; б) $\{4; 1\}$; в) $\{1; 1\}$; г) $\{-1; 0\}$. **923.** а) $\{3; 2\}$; б) $\{0; 0\}$; в) $\{-1; 9\}$; г) $\{-7; -2\}$. **924.** $2\vec{a}\{6; 4\}$, $3\vec{a}\{9; 6\}$, $-\vec{a}\{-3; -2\}$, $-3\vec{a}\{-9; -6\}$. **925.** $\{-2; -4\}$, $\{3; 0\}$, $\{0; 0\}$, $\{3; 5\}$, $\{-3; 3\}$, $\{0; -5\}$. **926.** а) $\{21; -21\}$; б) $\{18; 24\}$; в) $\{-21; -14\}$; г) $\{8; -10\}$. **927.** Указание. Воспользоваться леммой о коллинеарных векторах. **928.** $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$. **929.** а) $A(5; 0)$, $B(0; 3)$, $O(0; 0)$; б) $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $O(0; 0)$. **930.** а) $O(0; 0)$, $A(6,5; 0)$, $C(6,5; 3)$, $B(0; 3)$; б) $O(0; 0)$, $A(a; 0)$, $C(a; b)$, $B(0; b)$. **931.** $M(3; -3)$, $N(3; 3)$, $Q(-3; -3)$ или $M(3; -3)$, $N(-3; -3)$, $Q(3; 3)$. **932.** $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; b)$. **933.** $(7; -3)$. **934.** а) $(-2; 0)$; б) $(0; 28)$; в) $(3; 4)$; г) $(-4; -8)$. **935.** 1) $\vec{AB}\{1; 1\}$; 2) $x = -3$, $y = -4$; 3) $A(0; 1{,}5)$;

4) $B(a+c; b+d)$; 5) $B(1; 3)$. 936. 1) $M\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$; 2) $A(-10; -11)$; 3) $B(6; -13)$; 4) $M(-1,5; 3,5)$; 5) $B(2a-c; 2b-d)$; 6) $M(3; 0,5)$; 7) $M(2t+6; 0)$; 8) $B(-1; -3)$. 937. $C(10; -7)$, $D(7,5; -8)$. 938. а) $\sqrt{106}$; б) 5; в) $10\sqrt{2}$; г) $\sqrt{389}$; д) $11\sqrt{2}$; е) 10. 939. а) 2; б) 3; в) $\sqrt{13}$. 940. а) 4; б) 3; в) 5; г) 5. 941. $\sqrt{82}+2\sqrt{17}+7\sqrt{2}$. 942. $\sqrt{13}$. 943. $AC=\sqrt{a^2+c^2}$, $BC=\sqrt{b^2+c^2}$. 944. а) $C(a+b; c)$; б) $AC=\sqrt{b^2+c^2}$, $CO=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. 945. $AC=\sqrt{(b+d-a)^2+c^2}$, $OC=\sqrt{(b-d)^2+c^2}$. 946. а) 2; б) 3 или $-2,6$. 947. а) 13; б) 5. 948. а) $(0; -3)$; б) $(0; 3)$. 949. а) $(-2,5; 0)$; б) $(6; 0)$. 950. а) $MP=2\sqrt{5}$, $NQ=5$; б) $MP=4\sqrt{2}$, $NQ=2\sqrt{2}$. 951. Указание. Доказать, что отрезки AC и BD равны и их середины совпадают. а) 8; б) 17. 954. 100 см, 100 см. Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 251. 955. 12 см. Указание. Систему координат выбрать так, чтобы основание треугольника лежало на оси Ox, а высота — на оси Oy. 956. Указание. Систему координат выбрать так, чтобы одно из оснований трапеции лежало на оси Ox, а его концы были симметричны относительно начала координат. 957. Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 253, и доказать, что $b=0$. 958. Указание. Систему координат выбрать так, чтобы лучи AB и AD были положительными полуосями. 960. а) A и C; б) B; в) B и D. 961. а) C; б) B; в) A и D. 962. а) $(-4; -3)$, $(-4; 3)$; б) $(4; 3)$, $(-4; 3)$. 964. а) $(3; 0)$, $(9; 10)$; б) $(-5; 5)$, $(0; 5)$. 965. 1) $x^2+y^2=9$; 2) $x^2+y^2=2$; 3) $x^2+y^2=\frac{25}{4}$. 966. а) $x^2+(y-5)^2=9$; б) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; в) $(x+3)^2+(y+7)^2=\frac{1}{4}$; г) $(x-4)^2+(y+3)^2=100$. 967. $x^2+y^2=10$. 968. $x^2+(y-6)^2=25$. 969. а) $(x-2)^2+(y-3)^2=41$; б) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. 970. $(x-5)^2+y^2=25$, $(x+3)^2+y^2=25$; две окружности. 971. $x^2+(y-1)^2=25$. 972. б) $x+y-7=0$; в) $3x-2y-2=0$. 973. $7x-y+3=0$. 974. а) $x-y=0$, $y-1=0$; б) $3x-5y+5=0$. 975. $(-4; 0)$ и $(0; 3)$. 976. $(3; -2)$. 977. $x=3$ и $y=5$. 979. 7. 980. $5x+2y-10=0$, $5x-2y-10=0$, $5x+2y+10=0$, $5x-2y+10=0$ или $2x+5y-10=0$, $2x-5y-10=0$, $2x+5y+10=0$, $2x-5y+10=0$. 982. а) Окружность радиуса 4 с центром B; б) окружность радиуса $\frac{5}{8}$ с центром D, лежащим на отрезке BC, причём $BD=\frac{1}{8}$. 983. Окружность с центром в точке O радиуса $\sqrt{\frac{k^2-2a^2}{2}}$, если $k^2>2a^2$, и точка O, если $k^2=2a^2$, где O — середина отрезка AB и $a=\frac{AB}{2}$. Если $k^2<2a^2$, то точек, удовлетворяющих условию задачи, не существует. 985. Серединный перпендикуляр к отрезку AB', где B' и B — точки, симметричные относительно точки A. 986. Прямая BC. Указание. Выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и D лежали на оси Ox и были симметричны относительно оси Oy. 987. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей ромба и перпендикулярная к стороне ромба. 988. а) $x=-\frac{1}{2}$; б) не существует; в) $x=-3$; г) $x=3$. 989. а) $(-3; -1)$, $\sqrt{65}$;

б) (14; 4), $2\sqrt{53}$; в) (−21; 3), $\sqrt{450}$; г) (6; −18), $6\sqrt{10}$. **990.** а) (2; −4), (7; −3), (1; 2), (−4; 7); б) 5, 10, $\sqrt{97}$, $\sqrt{58}$. **991.** Указание. Вместо вектора $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1; 0\}$ отложить от начала координат вектор $\overrightarrow{OA}$, равный $\overrightarrow{M_1M_2}$, и воспользоваться тем, что абсцисса точки A равна x_2-x_1. **993.** Указание. Сначала доказать, что $AB=BC$. **995.** (5; 9). **996.** а) (−1; 9), (9; 2), (−4; 6); б) $5\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{7}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$. **998.** 40. **999.** (0; 8) или (−2; 2) или (−5; 0); три решения. **1000.** Окружности: а), б), г), д). **1001.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. **1002.** а) $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$; б) $(x-3)^2+(y+3)^2=25$. **1003.** а) $5x-2y+14=0$, $x+2y-6=0$, $6x-y+10=0$; б) $3x+5y-4=0$, $5x-y-7=0$, $x+6y-33=0$; в) $3x+4y-17=0$, $5x-y+6=0$, $x+6y-10=0$. **1006.** 10,5 см, $\sqrt{261}$ см, $\frac{\sqrt{3529}}{2}$ см или 12,5 см, $\sqrt{709}$ см, $\frac{\sqrt{4381}}{2}$ см. **1008.** Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 301. **1009.** Указание. На продолжении отрезка AA_1 отложить отрезок A_1A_2, равный AA_1. Далее воспользоваться задачей 988. **1010.** а) Окружность радиуса $2AB$ с центром в точке B', симметричной точке B относительно точки A; б) окружность радиуса $\frac{4}{3}AB$ с центром в точке C, лежащей на отрезке AB, причём $AC=\frac{5}{3}AB$.

Глава XI

1013. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; в) 0. **1014.** а) $\pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) 1. **1015.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $-\frac{3}{4}$. **1016.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1018.** а) $x=y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; б) $x=0$, $y=1,5$; в) $x=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $y=2,5$; г) $x=-1$, $y=0$; д) $x=\sqrt{3}$, $y=1$. **1019.** а) 45°; б) 90°; в) 150°; г) 135°. **1020.** а) $12\sqrt{3}$ см²; б) 27 см²; в) ≈ 35 см². **1022.** 10 см. **1023.** 25 см². **1024.** а) $\frac{h_1\cdot h_2}{2\sin\alpha}$; б) $\frac{h^2\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$. **1025.** а) $\angle C=80°$, $a\approx12,3$, $b\approx9,1$; б) $\angle B=70°$, $c\approx4,5$, $a\approx2,3$; в) $\angle B\approx37,989°\approx37°59'$, $\angle C\approx82°01'$, $c\approx14$; г) $\angle A=80°$, $b\approx19,5$, $c\approx25,5$; д) $\angle B\approx37,317°\approx37°19'$, $\angle C\approx95°41'$, $c\approx11$; е) $c\approx5,7$, $\angle A=\angle B=65°$; ж) $a\approx64,84$, $\angle B\approx30,300°\approx30°18'$, $\angle C\approx99°42'$; з) $\angle A\approx42,833°\approx42°50'$, $\angle B\approx60,941°\approx60°57'$, $\angle C\approx76°13'$; и) $\angle A\approx34,533°\approx34°32'$, $\angle B\approx64,270°\approx64°16'$, $\angle C\approx40°52'$. **1026.** $AB\approx15$ см, $S_{ABC}\approx67$ см². **1027.** $AC=6$ м, $AB\approx3$ м, $BC\approx4$ м. **1028.** ≈ 39°38′, ≈ 117°52′ или ≈ 140°22′, ≈ 17°08′. **1029.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma}$, где $\gamma=\frac{\alpha-\beta}{2}$, если

$\alpha>\beta$, и $\gamma=\frac{\beta-\alpha}{2}$, если $\beta>\alpha$. 1030. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$, $\cos\gamma=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$, где γ — угол между диагоналями параллелограмма. 1031. а) Остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. 1032. $\approx 74{,}2$ кг. 1034. ≈ 25 см. 1035. 60° или $\approx 47{,}112^\circ \approx 47^\circ 07'$. 1036. ≈ 62 м. 1037. $\approx 14{,}5$ м. 1038. 50 м. 1039. а) 45°; б) 90°; в) 90°; г) 90°; д) 180°; е) 90°; ж) 135°; з) 0°. 1040. а) 60°; б) 120°; в) 150°; г) 90°; д) 0°; е) 180°. 1041. а) $3\sqrt{3}$; б) 0; в) $-3\sqrt{3}$. 1042. а) $\frac{1}{2}a^2$; б) $-\frac{1}{2}a^2$; в) 0; г) a^2. 1043. 13. 1044. а) $-2{,}5$; б) 0; в) 5. 1047. а) $x=7{,}5$; б) $x=\frac{2}{3}$; в) $x=0$. 1048. $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=0$, $\cos C=\frac{4}{5}$. 1049. $\angle A=60^\circ$, $\angle B=21^\circ 47'$, $\angle C=98^\circ 13'$. 1050. $\sqrt{129}$ и 7. 1051. 8. 1052. 13. 1053. -5. 1057. $BE=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $AE=\frac{b}{2}\sqrt{3}$, $EC=\frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$, $BC=b\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 1058. а) $\approx 6{,}254$ м²; б) $\approx 0{,}449\,073$ м². 1060. а) $\angle C=105^\circ$, $AC\approx 6$ см, $BC\approx 4$ см; б) $\angle A\approx 75^\circ$, $BC\approx 6$ дм, $AC\approx 4$ дм; в) $\angle C\approx 48^\circ 59'$, $\angle B\approx 88^\circ 35'$, $AC\approx 4$ см; г) $\angle A\approx 26^\circ 22'$, $\angle C\approx 90^\circ 50'$, $AB\approx 11{,}7$ см. 1061. а) $BC\approx 12$ см, $\angle C\approx 17^\circ 48'$, $\angle B\approx 27^\circ 16'$; б) $AC=\sqrt{6}$ дм, $\angle A\approx 71^\circ 34'$, $\angle C\approx 63^\circ 26'$; в) $AB\approx 6{,}4$ дм, $\angle A\approx 2^\circ$, $\angle B\approx 28^\circ$. 1062. $\angle D\approx 117^\circ 10'$, $\angle E\approx 38^\circ 59'$, $\angle F\approx 23^\circ 51'$. 1063. $\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$. Указание. Воспользоваться формулой площади треугольника (п. 100). 1064. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$. 1065. $-\frac{5\sqrt{34}}{34}$. 1066. 5. 1067. 15 и $\approx 24{,}4$. 1068. $x=40$. 1069. $35^\circ 31'$. 1070. $72\sqrt{3}$ см²; 12 см. 1071. $\sqrt{21}$. Указание. Воспользоваться задачей 1022. 1072. $\frac{a^2\sin^2 3\alpha\sin 4\alpha}{\sin^2\alpha}$. 1076. Указание. а) Воспользоваться задачами 535 и 1074; б) воспользоваться задачей 1074. 1077. Указание. а) Воспользоваться задачей 1063; б) пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — данные подобные треугольники, а O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей. Сначала доказать, что $\triangle A_1O_1B_1 \sim \triangle A_2O_2B_2$.

Глава XII

1078. а) Да; б) нет. 1079. б), в). 1081. а) 60°; б) 108°; в) 120°; г) 144°; д) 150°. 1082. 360°. 1083. а) 3; б) 4; в) 6; г) 12. 1084. а) 6; б) 12; в) 4; г) 10; д) 20; е) 5. 1085. Указание. Воспользоваться тем, что серединный перпендикуляр к любой стороне правильного многоугольника проходит через центр описанной окружности. 1086. Указание. Воспользоваться тем, что биссектриса любого угла правильного многоугольника проходит через центр вписанной окружности. 1087. 1) $R=3\sqrt{2}$, $r=3$, $P=24$, $S=36$; 2) $R=2\sqrt{2}$, $a_4=4$, $P=16$, $S=16$; 3) $r=2\sqrt{2}$, $a_4=4\sqrt{2}$, $P=16\sqrt{2}$, $S=32$; 4) $R=3{,}5\sqrt{2}$, $r=3{,}5$, $a_4=7$, $S=49$; 5) $R=2\sqrt{2}$, $r=2$, $a_4=4$, $P=16$. 1088. 1) $r=1{,}5$, $a_3=3\sqrt{3}$, $P=9\sqrt{3}$, $S=\frac{27\sqrt{3}}{4}$; 2) $R=\frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $r=\frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $a_3=2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, $P=6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$; 3) $R=4$, $a_3=4\sqrt{3}$, $P=12\sqrt{3}$, $S=12\sqrt{3}$; 4) $R=\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{5\sqrt{3}}{6}$, $P=15$, $S=\frac{25\sqrt{3}}{4}$; 5) $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3=2$, $S=\sqrt{3}$. 1089. $2\sqrt{6}$ см. 1090. $2\sqrt{3}$ см. 1091. 8 см. 1092. $32\sqrt{3}$ см. 1094. а) 16 см²; б) $16\sqrt{3}$ см²; в) $108\sqrt{3}$ см²; г) ≈245,52 см². 1095. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ см². 1096. $S_3 : S_4 : S_6 = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$. 1097. 3 : 4. 1098. а) $2\sqrt{3}r$, $6\sqrt{3}r$, $3\sqrt{3}r^2$; б) $\sqrt{3}R$, $3\sqrt{3}R$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. 1099. $\sqrt{3}R^2$. 1100. а), г) Указание. Воспользоваться задачей 2, п. 118. 1101. 1) 25,12; 2) 18,84; 3) 12,56; 4) 9; 5) 4,40; 6) 1; 7) 657,42; 8) 14,65; 9) 0,45. 1102. а) Увеличится в три раза; б) уменьшится в два раза; в) увеличится в k раз; г) уменьшится в k раз. 1103. а) Увеличится в k раз; б) уменьшится в k раз. 1104. а) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; г) $\frac{\pi a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; д) 3π. 1105. а) πa; б) $\pi a(\sqrt{2}-1)$; в) $\pi a(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$; г) $2\pi h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\varphi$. 1106. 63 см. 1107. ≈12 750 км. 1108. ≈43 018 км. 1109. а) π см; б) $\frac{3}{2}\pi$ см; в) 2π см; г) 3π см. 1110. 30. 1111. ≈59,2 см. 1112. ≈96,3 см. 1113. ≈4°35′. 1114. 1) 12,56; 2) 78,5; 3) 1,69; 4) 0,25; 5) 7; 6) 0258,26; 7) 0,45; 8) 1,41. 1115. а) Увеличится в k^2 раз; б) уменьшится в k^2 раз. 1116. а) $\frac{\pi(a^2-b^2)}{4}$; б) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$; в) $\frac{\pi(a^2-4h^2)}{64h^2}$. 1117. а) $\frac{\pi a^2}{12}$; б) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha+1)^2}$; в) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$; г) $\frac{\pi a^2}{4}\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. 1118. ≈36,2 м². 1119. $D\approx13{,}05$ м, $S\approx133{,}84$ м². 1120. 4π см². 1121. 0,75 мм. 1122. $5{,}6\pi$ дм² ≈ 17,6 дм². 1123. $r^2(\pi-2)$. 1124. Площадь наименьшего круга равна π, а площади колец равны 3π, 5π, 7π. 1126. ≈262 см². 1127. $\sqrt{\frac{18}{\pi}}$. 1128. $\frac{4-\pi}{4}a^2$. 1129. а) 20; б) 8; в) 5; г) 6. 1130. $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ дм. 1131. 6,75 см. 1132. а) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 1135. 6 см; $54\sqrt{3}$ см². 1137. 330 км. 1138. а) ≈15,1 см; б) $\pi a\sin\alpha$. 1139. ≈4,4 км. 1141. $\frac{\pi}{2}(20+9\sqrt{3})$ см.

1143. $\frac{65}{4}\pi$ см. 1144. Указание. Пусть $ABCDEFGH$ — искомый восьмиугольник, а O — центр описанной окружности. Сначала построить равнобедренный треугольник ABO. 1145. Указание. Использовать теорему Пифагора. 1146. Указание. Сначала вписать в окружность правильный треугольник и правильный шестиугольник.

Глава XIII

1151. Указание. Доказать методом от противного. 1154. Указание. Воспользоваться теоремой п. 113. 1155. Указание. Доказательство провести методом от противного (см. доказательство теоремы п. 113). 1157. Указание. Воспользоваться задачами 1150 и 1151. 1158. Указание. Сначала построить образы каких-нибудь двух точек прямой b. 1159. F — четырёхугольник. 1160. Указание. Задача решается аналогично задаче 1158. 1161. F — треугольник. 1172. Указание. Пусть M — произвольная точка прямой AB, а M' — её образ. Используя равенства $AM = AM'$, $BM = BM'$, доказать, что точки M и M' совпадают. 1173. Указание. Воспользоваться задачей 1165. 1174. а) Указание. Воспользоваться задачей 1157. 1175. Указание. Использовать симметрию относительно прямой a. 1176. Указание. Использовать точки D_1 и D_2, симметричные точке D относительно прямых AB и BC. 1178. Указание. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AD}$. 1179. Указание. Учесть, что высоты треугольника, на который отображается треугольник ABS при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$, пересекаются в одной точке. 1180. Указание. Использовать поворот вокруг точки O на угол в $120°$. 1181. Указание. Сначала построить прямую, симметричную одной из данных прямых относительно точки O. 1182. Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AD и BC. Сначала построить треугольник ACD_1, где D_1 — точка, в которую отображается точка D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Глава XIV

1184. а) 6, 12, 8; б) 4, 6, 4; в) 8, 12, 6. 1187. а) Нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет. 1189. а) Параллелограмм ABC_1D_1; б) параллелограмм ACC_1A_1. 1190. Искомой точкой является точка пересечения прямых: а) MN и BC; б) AM и A_1B_1. 1191. Указание. Сначала через середину ребра CD провести прямую, параллельную B_1D_1. 1192. Указание. а) Сначала через точку M провести прямую, параллельную NK, и далее рассмотреть отдельно случаи, когда эта прямая пересекается с ребром BC и когда она пересекается с ребром CC_1; б) сначала через точку N провести прямую a, параллельную MK, и далее рассмотреть отдельно три случая: прямая a пересекает ребро AA_1; прямая a пересекает ребро DD_1; прямая a совпадает с AD. 1193. а) $\sqrt{6}$; б) 17; в) 13. 1194. $a\sqrt{3}$. 1195. а) $V = V_1 + V_2$; б) $V = \frac{2}{3}V_1 + V_2$. 1196. 12 см. 1197. $240\sqrt{3}$ см³. 1199. $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см³. 1200. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$; б) a^3;

в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$; г) $2a^2\operatorname{ctg}22°30'$. 1205. Нет. 1207. $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{65}$ см, $\sqrt{65}$ см. 1208. $2a^2$. 1211. а) 6 м²; б) 1950 см². 1212. $\frac{1}{8}a^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}$.
1214. а) 24π см²; б) $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см; в) 2 см. 1215. а) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; б) $\frac{2}{\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; д) $\frac{n}{2\pi}\sin\frac{360°}{n}$. 1216. π^2 м². 1217. ≈2,85 м². 1218. б) $\frac{6}{\pi}$. 1220. а) $2,25\pi$ см²; б) 9 см; в) $\sqrt{\frac{3p}{4\pi}}$. 1221. $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{Q(P^2-Q^2)}{\pi}}$. 1222. $\frac{225}{7}\pi$ дм². 1223. $S_{сф}=900\pi$ см², $S_{кр}=1461$ см². 1226. а) 64π см², $\frac{256}{3}\pi$ см³; б) ≈3 см, ≈36π см³; в) 4 см, $\frac{256}{3}\pi$ см³. 1227. Объём Земли в 64 раза больше объёма Луны. 1228. Нет. 1229. 432π см² ≈ 1357 см². 1231. 4 : 1. 1232. Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. 1233. Указание. Воспользоваться тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. 1234. б) Указание. Сначала построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает грань AA_1D_1D. 1235. Параллелограмм BKD_1L. 1236. $2\sqrt{122}$ дм. 1237. а) $432\sqrt{2}$ см²; б) $4\sqrt{6}$; в) $0,32\sqrt{3}$ см³. 1238. $\frac{1}{2}m^2\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$. 1239. 72 см³. 1241. $(2\sqrt{34}+22)$ м². 1242. $180\sqrt{2}$ см³.
1243. $\frac{na^2}{24}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{180°}{n}}$. 1244. ≈208 м. 1245. ≈61 кг.
1246. $6\sqrt{2}$ см, 18 см. 1247. $\frac{d^3}{5\pi}$. 1248. 376 см³. 1249. 216°. 1250. 9π см², 6 см. 1251. $2\pi m^3\sin\varphi$. 1252. $H=\frac{4}{3}R$, где H — высота цилиндра, R — радиус шара. 1253. Уровень воды повысится на $\frac{32}{75}$ см. 1254. $6370^2\pi$ км² ≈ $1,25\cdot10^8$ км². 1255. $m^2 : n^2$.

Задачи повышенной трудности

1256. Указание. Использовать координаты середин диагоналей AC и BD. 1257. Указание. Воспользоваться тем, что отношение соответствующих координат векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ равно λ. 1258. $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. Указание. Воспользоваться задачей 1257. 1259. $D\left(\frac{15}{11}; \frac{84}{11}\right)$. Указание. Воспользоваться задачами 395 и 1257. 1260. $2\sqrt{5}$ см. Указание. Принять за оси координат прямые AM и BN. 1261. $\left(\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3}; \frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$. 1262. а) $M\left(2\frac{3}{4}; 0\right)$.

б) $M(2; 0)$. Указание. Воспользоваться тем, что если две точки лежат по разные стороны от оси абсцисс, то искомая точка является точкой пересечения отрезка с концами в этих точках с осью абсцисс. 1263. Указание. а) Пусть L — линия, заданная данным уравнением, а $M_0(x_0; y_0)$ — некоторая её точка. Написать уравнение серединного перпендикуляра к отрезку M_1M_2, где $M_1(x_0 - 2; y_0 - 8)$, $M_2(x_0 + 2; y_0 - 8)$, и убедиться в том, что оно совпадает с данным уравнением. б) Учесть, что уравнение любой окружности не содержит членов вида kxy, где k — число, $k \neq 0$. 1264. $(1; 0)$, $(-0{,}6; 0{,}8)$, $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 1265. а) Окружность, точка или пустое множество. б) Прямая, вся плоскость или пустое множество. Указание. Вывести уравнение искомого множества точек. 1266. Окружность без одной точки. Указание. Вывести уравнение искомого множества точек, задав систему координат так, чтобы прямая a лежала на одной из осей координат, а точка A лежала на другой оси. 1267. Окружность радиуса $\sqrt{2}R$, где R — радиус данной окружности. Указание. Ввести систему координат с началом O и вывести уравнение искомого множества. 1268. б) Указание. Воспользоваться теоремой, обратной теореме Пифагора. 1269. Указание. Положив $MN = a$, сначала найти площадь треугольника AMB и стороны AM и BM. 1270. Указание. Доказать, что в любом выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ имеет место равенство $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$ (O — точка пересечения диагоналей). 1271. Указание. Доказать утверждение сначала для выпуклого четырёхугольника. Для этого провести диагональ, соединяющую общий конец сторон a и d с общим концом сторон b и c, и найти площади полученных треугольников. 1272. Указание. Воспользоваться тем, что $S_{ABC} = S_{AA_1B} + S_{AA_1C}$. 1273. $\sqrt{\frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad + bc}}$, $\sqrt{\frac{c^2ab + d^2ab + a^2dc + b^2dc}{ab + dc}}$, где a, b, c, d — стороны вписанного четырёхугольника. 1274. Указание. Пользуясь теоремой косинусов, доказать, что синус угла, заключённого между сторонами a и b, равен $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab + cd}$, где p — полупериметр. 1275. Указание. Доказать сначала, что прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис тогда и только тогда, когда вписанная окружность касается одной из сторон треугольника в точке, равноудалённой от середины этой стороны и основания высоты, проведённой к этой стороне. 1276. $72 \sin \alpha \cos^4 \alpha$. 1277. $2\sqrt{S \operatorname{tg} \beta}$. 1278. $\frac{l^2 - h^2}{2h}$. 1279. Указание. Сначала найти и сравнить углы BAC и AOB. 1280. Указание. Воспользоваться задачей 1279. 1281. Указание. Пусть M — середина стороны A_1A_2. Доказать, что треугольник AA_1M равнобедренный, и, пользуясь этим, установить, что центр описанной около пятиугольника окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ACM. 1282. Указание. Воспользоваться задачей 1280. 1283. Указание.

Воспользоваться задачей 1282. 1284. Указание. Воспользоваться задачей 1283. 1288. Указание. Соединить точку M отрезками с вершинами многоугольника и представить площадь многоугольника в виде суммы площадей полученных треугольников. 1290. Указание. Воспользоваться задачей 995. 1291. Указание. Воспользоваться задачей 1155. 1292. Указание. Построить равные равнобедренные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами A и A_1 и воспользоваться задачей 1156. 1294. Указание. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — данные трапеции с большими основаниями AB и A_1B_1. На лучах AB и A_1B_1 отложить отрезки $AE=DC$ и $A_1E_1=D_1C_1$ и к треугольникам BCE и $B_1C_1E_1$ применить утверждение задачи 1156. 1295. Указание. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle B-\angle C=\angle B_1-\angle C_1$. Рассмотреть две осевые симметрии относительно прямых, содержащих высоты AH и A_1H_1 данных треугольников. 1296. Указание. Использовать центральную симметрию относительно точки пересечения диагоналей одного из параллелограммов. 1297. Указание. Использовать осевую симметрию относительно данной прямой. 1298. Указание. Если точка M лежит на стороне OB, то сначала построить прямую, симметричную прямой AO относительно точки M. 1300. Указание. Пусть O — точка пересечения медиан искомого треугольника ABC, а O_1 — точка, симметричная точке O относительно середины стороны AC. Сначала построить $\triangle AOO_1$. 1301. Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AB и CD. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. 1302. Указание. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. 1303. Указание. Использовать поворот вокруг точки A на угол $90°$. 1304. Указание. Пользуясь теоремой о площади треугольника (п. 100) и теоремой косинусов, выразить квадрат площади треугольника ABC через квадраты его сторон, а затем воспользоваться теоремой Пифагора. 1306. Указание. Разрезать куб по некоторым рёбрам и развернуть его таким образом, чтобы получилась плоская фигура. 1307. Указание. Взять в качестве оси вращения диагональ куба и сначала доказать, что проекцией куба на плоскость, перпендикулярную к этой оси, является правильный шестиугольник со стороной $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, где a — длина ребра куба. 1308. $\frac{1}{12}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{5}{12}V$. 1309. Указание. Доказать, что полученные две части являются тетраэдрами с общим основанием и равными высотами. 1310. $\frac{1}{12}\pi a^3 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\left(3-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$

Предметный указатель

П

Т

Список литературы

1. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Шестаков С.А., Юдина И.И. Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики. — М.: Физматлит, 2005.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Шестаков С.А., Юдина И.И. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 кл. — М.: Вита — Пресс, 2006.
3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Юдина И.И. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 кл. — М.: Вита — Пресс, 2002.

Оглавление

Глава II

Треугольники

Глава III

Глава XIV

Начальные сведения из стереометрии

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Позняк Эдуард Генрихович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

7—9 классы

Учебник для общеобразовательных организаций

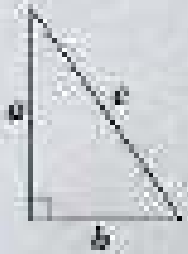
Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова
Редактор Л. В. Кузнецова
Младшие редакторы Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко
Художники [illegible], О. П. Богомолова
Художественный редактор О. П. Богомолова
Компьютерная графика: С. А. Крутиков, А. С. Пьянов
Компьютерная верстка [illegible]
Корректор [illegible]

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.06.1?. Формат 70×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 21,03 + 0,42 форз. Доп. тираж 50 000 экз. Заказ № 35794к-см.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

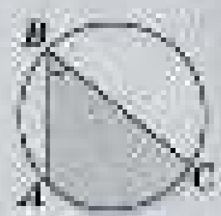
Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат» ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



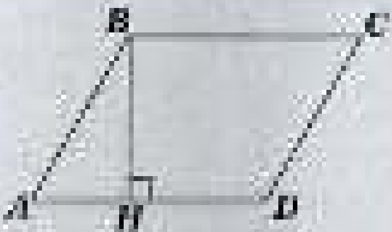
$$c^2 = a^2 + b^2$$

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$$

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

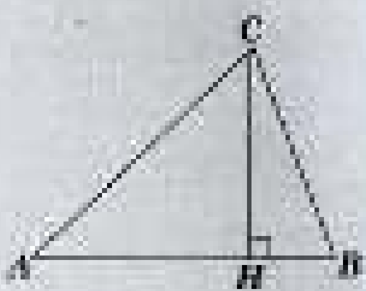


$$S = AB \cdot BH$$

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

$$C = 2\pi R$$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

ПЛОЩАДЬ КРУГА

$$S = \pi R^2$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

$$\sin A = \frac{BC}{AB},\ \cos A = \frac{AC}{AB},\ \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

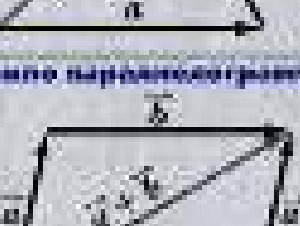
теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

правило треугольника

правило параллелограмма



СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha = x_1x_2 + y_1y_2$$

Учебно-методический комплект по геометрии для 7—9 классов

В. Ф. Бутузов
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
к учебнику Л. С. Атанасяна и др.

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина
УЧЕБНИК

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина
РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

М. А. Иченская
САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Т. М. Мищенко, А. Д. Блинков
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, В. Б. Некрасов, И. И. Юдина
ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 7—9 классах

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский
ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 7—11 классов

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО